Theoretische Teilchenphysik

Hans-Werner Hammer
Martin Ebert (mebert@theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
2. Übung — 13. November

Aufgabe 1 Grundlagen zur $SU(2)$-Symmetrie für Teilchen und Antiteilchen

Up- und Down-Quarks können als Dublett im (komplexen) $SU(2)$-Isospinraum zusammengefasst werden:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \text{ wobei } |u\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |d\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren darstellen. Die starke Wechselwirkung erhält den Isospin, woraus folgt, dass der Hamiltonoperator der starken Wechselwirkung invariant unter unitären Transformationen im Isospinraum ist. Es gilt also

$$[H, \vec{I}] = \vec{0} \text{ mit } \vec{I} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$$

und den Paulimatrizen τ_j ($\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$), gegeben als

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$I_3|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle, \quad I_3|d\rangle = -\frac{1}{2}|d\rangle$$

und weiter

$$I_+|u\rangle = 0, \quad I_+|d\rangle = |u\rangle, \quad I_-|u\rangle = |d\rangle, \quad I_-|d\rangle = 0,$$

mit den Auf- und Absteigeoperatoren $I_\pm = I_1 \pm iI_2$. Die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ mit $I_+|u\rangle = 0$ bzw. $I_-|d\rangle = 0$ werden Zustände mit **höchstem** bzw. **niedrigstem Gewicht** genannt.

Die Matrizen I_j sind **Generatoren** der Gruppe $SU(2)$. Für die Paulimatrizen kann durch explizite Rechnungen gezeigt werden, dass

$$\tau_j \tau_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\tau_l \tag{2}$$

und es folgt für die I_j

$$[I_j, I_k] = i\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} I_l \; . \tag{3}$$

Gleichung (3) definiert die **(Lie-)Algebra** der Gruppe $SU(2)$. Die in Gleichungen (2) und (3) auftretenden Größen ϵ_{jkl} werden **Strukturkonstanten** genannt und sind im Falle der Gruppe $SU(2)$ durch den

Epsilontensor gegeben. Alle Elemente der Gruppe $SU(2)$ und deren Wirkung auf Elemente des Isospinraums können nun ausgedrückt werden durch

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U(\vec{\varphi}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U(\vec{\varphi}) = \exp\bigl(i\vec{\varphi}\cdot\vec{I}\bigr) = \exp\bigl(\tfrac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\tau}\bigr), \tag{4}$$

wobei

$$\vec{\varphi}\cdot\vec{I} := \varphi_1 I_1 + \varphi_2 I_2 + \varphi_3 I_3 \quad \text{mit} \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathscr{R}^3$$

und analog für $\vec{\varphi}\cdot\vec{\tau}$.

(b) Überprüfen Sie, dass für $U(\vec{\varphi})$ gilt

$$U(\vec{\varphi}) = \cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\mathbb{1} + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\hat{\varphi}\cdot\vec{\tau}$$

mit

$$\varphi := |\vec{\varphi}| \quad \text{und} \quad \hat{\varphi} := \tfrac{\vec{\varphi}}{\varphi}.$$

Für die adjungierten Zustände $\langle\bar{u}|$ und $\langle\bar{d}|$ ergeben sich die unitären Transformationen zu

$$(\bar{u}'\ \bar{d}') = (\bar{u}\ \bar{d})\, U^\dagger \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = \left(U^\dagger\right)^t \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\left(U^\dagger\right)^t = \tau_2 U \tau_2.$$

Benutzen Sie dafür die Eigenschaft der Paulimatrizen

$$\tau_j^t = -\tau_2 \tau_j \tau_2.$$

Leiten Sie daraus ab, dass $\tau_2|\bar{n}\rangle$ als Dublett wie in (4) transformiert, also

$$\tau_2 \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = U\tau_2 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Die Antiteilchenzustände $|\bar{u}\rangle = \mathscr{C}|u\rangle$ und $|\bar{d}\rangle = \mathscr{C}|d\rangle$, mit dem Ladungskonjugationsoperator $\mathscr{C}$, werden daher zusammengefasst als

$$|\bar{n}\rangle = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix},$$

sodass das Teilchen- und Antiteilchendubletts in gleicher Weise unter $SU(2)$ transformieren.

Aufgabe 2 Deuteronreaktionen

Benutzen Sie, dass die starke Wechselwirkung den Isospin erhält um zu zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt σ der Reaktionen $pp \to \pi^+ d$ und $np \to \pi^0 d$ die Relation

$$\frac{\sigma(pp \to \pi^+ d)}{\sigma(np \to \pi^0 d)} = 2$$

erfüllt. Das Deuteron d ist der Kern des schweren Wasserstoffs Deuterium und hat Isospin $I = 0$, Pionen π haben Isospin $I = 1$.

Hinweise:

- Sie dürfen annehmen, dass für den Wirkungsquerschnitt gilt:

$$\sigma \sim |\text{Amplitude}|^2 \sim \sum_I |\langle I, I_3 | A | I, I_3\rangle|^2 \ .$$

- Benutzen Sie das Wigner-Eckart-Theorem

Aufgabe 3 Pion-Pion-Streuung

Pionen haben Isospin $I = 1$. Folglich können zwei Pionen in Zuständen mit Isospin $I = 0, 1, 2$ sein.

(a) Konstruieren Sie die (Zweiteilchen-) Isospinbasis $|I, I_3\rangle$ mit $I = 0, 1, 2$ aus den Einteilchen-Pionzustände $|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle$, $|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$ und $|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$. Benutzen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

(b) Drücken Sie die Streuamplituden

$$\begin{gathered}
\langle \pi^+\pi^- | T | \pi^+\pi^- \rangle, \\
\langle \pi^+\pi^- | T | \pi^0\pi^0 \rangle, \\
\langle \pi^0\pi^0 | T | \pi^0\pi^0 \rangle, \\
\langle \pi^0\pi^+ | T | \pi^0\pi^+ \rangle, \\
\langle \pi^+\pi^+ | T | \pi^+\pi^+ \rangle,
\end{gathered}$$

wobei T ein isospinerhaltender Operator ist, durch die Isospinamplituden $T^I = \langle I, I_3 | T | I, I_3 \rangle$ mit $I = 0, 1, 2$ aus.

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			

1/2×1/2

m_1	m_2	M	$J=1$	$J=0$
+1/2	+1/2	+1	1	
+1/2	−1/2	0	1/2	1/2
−1/2	+1/2	0	1/2	−1/2
−1/2	−1/2	−1	1	

1×1/2

m_1	m_2	M	$J=3/2$	$J=1/2$
+1	+1/2	+3/2	1	
+1	−1/2	+1/2	1/3	2/3
0	+1/2	+1/2	2/3	−1/3
0	−1/2	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	−1/2	1/3	−2/3
−1	−1/2	−3/2	1	

1×1

m_1	m_2	M	$J=2$	$J=1$	$J=0$
+1	+1	+2	1		
+1	0	+1	1/2	1/2	
0	+1	+1	1/2	−1/2	
+1	−1	0	1/6	1/2	1/3
0	0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	0	1/6	−1/2	1/3
0	−1	−1	1/2	1/2	
−1	0	−1	1/2	−1/2	
−1	−1	−2	1		

2×1/2

m_1	m_2	M	$J=5/2$	$J=3/2$
+2	+1/2	+5/2	1	
+2	−1/2	+3/2	1/5	4/5
+1	+1/2	+3/2	4/5	−1/5
+1	−1/2	+1/2	2/5	3/5
0	+1/2	+1/2	3/5	−2/5
0	−1/2	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	−1/2	2/5	−3/5
−1	−1/2	−3/2	4/5	1/5
−2	+1/2	−3/2	1/5	−4/5
−2	−1/2	−5/2	1	

3/2×1/2

m_1	m_2	M	$J=2$	$J=1$
+3/2	+1/2	+2	1	
+3/2	−1/2	+1	1/4	3/4
+1/2	+1/2	+1	3/4	−1/4
+1/2	−1/2	0	1/2	1/2
−1/2	+1/2	0	1/2	−1/2
−1/2	−1/2	−1	3/4	1/4
−3/2	+1/2	−1	1/4	−3/4
−3/2	−1/2	−2	1	

2×1

m_1	m_2	M	$J=3$	$J=2$	$J=1$
+2	+1	+3	1		
+2	0	+2	1/3	2/3	
+1	+1	+2	2/3	−1/3	
+2	−1	+1	1/15	1/3	3/5
+1	0	+1	8/15	1/6	−3/10
0	+1	+1	2/5	−1/2	1/10
+1	−1	0	1/5	1/2	3/10
0	0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	0	1/5	−1/2	3/10
0	−1	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	−1	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	−1	1/15	−1/3	3/5
−1	−1	−2	2/3	1/3	
−2	0	−2	1/3	−2/3	
−2	−1	−3	1		

3/2×1

m_1	m_2	M	$J=5/2$	$J=3/2$	$J=1/2$
+3/2	+1	+5/2	1		
+3/2	0	+3/2	2/5	3/5	
+1/2	+1	+3/2	3/5	−2/5	
+3/2	−1	+1/2	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	+1/2	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	+1/2	3/10	−8/15	1/6
+1/2	−1	−1/2	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	−1/2	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	−1/2	1/10	−2/5	1/2
−1/2	−1	−3/2	3/5	2/5	
−3/2	0	−3/2	2/5	−3/5	
−3/2	−1	−5/2	1		

$$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m}=(-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0}=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2|j_1 j_2 JM\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1|j_2 j_1 JM\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m}=(-1)^{m-m'}d^{\,j}_{m,m'}=d^{\,j}_{-m,-m'}$$

2×3/2

m_1	m_2	M	$J=7/2$	$J=5/2$	$J=3/2$	$J=1/2$
+2	+3/2	+7/2	1			
+2	+1/2	+5/2	3/7	4/7		
+1	+3/2	+5/2	4/7	−3/7		
+2	−1/2	+3/2	1/7	16/35	2/5	
+1	+1/2	+3/2	4/7	1/35	−2/5	
0	+3/2	+3/2	2/7	−18/35	1/5	
+2	−3/2	+1/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	+1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	+1/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10
+1	−3/2	−1/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	−1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	−1/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5
0	−3/2	−3/2	2/7	18/35	1/5	
−1	−1/2	−3/2	4/7	−1/35	−2/5	
−2	+1/2	−3/2	1/7	−16/35	2/5	
−1	−3/2	−5/2	4/7	3/7		
−2	−1/2	−5/2	3/7	−4/7		
−2	−3/2	−7/2	1			

3/2×3/2

m_1	m_2	M	$J=3$	$J=2$	$J=1$	$J=0$
+3/2	+3/2	+3	1			
+3/2	+1/2	+2	1/2	1/2		
+1/2	+3/2	+2	1/2	−1/2		
+3/2	−1/2	+1	1/5	1/2	3/10	
+1/2	+1/2	+1	3/5	0	−2/5	
−1/2	+3/2	+1	1/5	−1/2	3/10	
+3/2	−3/2	0	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	0	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	0	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	0	1/20	−1/4	9/20	−1/4
+1/2	−3/2	−1	1/5	1/2	3/10	
−1/2	−1/2	−1	3/5	0	−2/5	
−3/2	+1/2	−1	1/5	−1/2	3/10	
−1/2	−3/2	−2	1/2	1/2		
−3/2	−1/2	−2	1/2	−1/2		
−3/2	−3/2	−3	1			

2×2

m_1	m_2	M	$J=4$	$J=3$	$J=2$	$J=1$	$J=0$
+2	+2	+4	1				
+2	+1	+3	1/2	1/2			
+1	+2	+3	1/2	−1/2			
+2	0	+2	3/14	1/2	2/7		
+1	+1	+2	4/7	0	−3/7		
0	+2	+2	3/14	−1/2	2/7		
+2	−1	+1	1/14	3/10	3/7	1/5	
+1	0	+1	3/7	1/5	−1/14	−3/10	
0	+1	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10	
−1	+2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5	
+2	−2	0	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	0	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	0	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	0	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5
+1	−2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5	
0	−1	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10	
−1	0	−1	3/7	−1/5	−1/14	3/10	
−2	+1	−1	1/14	−3/10	3/7	−1/5	
0	−2	−2	3/14	1/2	2/7		
−1	−1	−2	4/7	0	−3/7		
−2	0	−2	3/14	−1/2	2/7		
−1	−2	−3	1/2	1/2			
−2	−1	−3	1/2	−1/2			
−2	−2	−4	1				

$$d^{\,1}_{0,0}=\cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2}=\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2}=-\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2}=-\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2}=\sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2}=\frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2}=-\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2}=\Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1}=-\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0}=\frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2}=\Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0}=\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.