Theoretische Teilchenphysik

Hans-Werner Hammer
Martin Ebert (mebert@theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
3. Übung 7. Dezember

Aufgabe 1 U-Spin-Symmetrie

(a) Argumentieren Sie, dass das Photon ein U-Spin-Singlett ist.

Nehmen Sie im Folgenden exakte $SU(3)$-Flavour-Symmetrie ($m_u = m_d = m_s$) an.

(b) Zeigen Sie, dass die Wirkungsquerschnitte σ der Reaktionen $\gamma p \to \Delta^0 \pi^+$ und $\gamma p \to \Sigma^{*0} K^+$ die Relation

$$\frac{\sigma(\gamma p \to \Delta^0 \pi^+)}{\sigma(\gamma p \to \Sigma^{*0} K^+)} = 2$$

erfüllen.

(c) Überprüfen Sie, dass der elektromagnetische Zerfall $\Sigma^{*-}(1385) \to \Sigma^- \gamma$ verboten, jedoch $\Sigma^{*+}(1385) \to \Sigma^+ \gamma$ erlaubt ist.

Aufgabe 2 Gell-Mann—Okubo—Formel

Vernachlässigt man isospinverletzende und andere Effekte, so wird die $SU(3)$-Flavour-Symmetrie durch die Strange-Quarkmasse zu $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$ gebrochen. Wir nehmen an, dass der Hamiltonian der starken Wechselwirkung geschrieben werden kann als

$$H = H_0 + H', \tag{1}$$

mit einem $SU(3)$-invarianten Anteil H_0 und einer (schwachen) Störung H', welche lediglich unter $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$ invariant ist. Die Masse eines Baryonenzustands $|\psi\rangle$ ist gegeben durch

$$m_\psi = \langle \psi | H | \psi \rangle.$$

Um Massenverschiebungen durch $SU(3)$-flavourbrechende Terme zu berechnen, betrachten wir anfangs ungestörte, d.h. $SU(3)$-invariante Baryonenzustände, welche einer irreduziblen Darstellung $D^{(\lambda)}$ von $SU(3)$ angehören. Diese bezeichnen wir als $\left|\psi^\lambda_{\vec{i}}\right\rangle$ mit dem Multiindex $\vec{i} = (I_3 Y) I$.

(a) Geben Sie die Massenverschiebung durch H' für den Zustand $\left|\psi^\lambda_{\vec{i}}\right\rangle$ in erster Ordnung Störungstheorie an.

Wir zerlegen nun H' in irreduzible $SU(3)$-Operatoren

$$H' = \sum_{\mu, \vec{k}} c_{\mu, \vec{k}} \mathcal{O}^\mu_{\vec{k}}, \tag{2}$$

wobei $\vec{k}$ wieder ein Multindex ist und μ die Dimension der Darstellung angibt. Der Operator $\mathcal{O}^\mu_{\vec{k}}$ transformiert als $\vec{k}$-ter Zustand in der Darstellung $D^{(\mu)}$.

(b) Welche Operatoren dürfen unter Berücksichtigung der Symmetrie von H' in (2) auftauchen?

Im Folgenden vernachlässigen wir Beiträge von Operatoren die Darstellungen mit Dimension > 10 angehören.

(c) Wie trägt ein Operator einer eindimensionalen $SU(3)$-Darstellung zur Massenverschiebung bei?

Wir beziehen uns nun auf Baryonen aus der Oktettdarstellung ($\lambda = 8$).

(d) Zeigen Sie, dass

$$\langle \psi_{\mathbf{i}}^{8} | H' | \psi_{\mathbf{i}}^{8} \rangle = a_1 \cdot f_1(\mathbf{i}) + a_2 \cdot f_2(\mathbf{i}) \tag{3}$$

mit Konstanten $a_{1,2}$ und Funktionen $f_{1,2}$ die von den Quantenzahlen des Zustandes $|\psi_{\mathbf{i}}^{8}\rangle$ abhängen.

(e) Benutzen Sie die Operatoren F_8 und $D_8 = \frac{2}{3} d_{8jk} F_j F_k$ als Spezialfälle und verwenden Sie die zuvor gefundenen Ergebnisse um die Gell-Mann—Okubo—Formel für das Baryonen-Oktett herzuleiten:

$$m_{\mathbf{i}}^{8} = \langle \psi_{\mathbf{i}}^{8} | H | \psi^{8} \mathbf{i} \rangle = a + b \cdot Y + c \cdot \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right). \tag{4}$$

(f) Leiten Sie aus (4) die Massenrelation $\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = \frac{3}{4} m_\Lambda + \frac{1}{4} m_\Sigma$ ab.

Hinweise:

- Benutzen Sie das Wigner-Eckart-Theorem.
- Aus der Gruppentheorie folgt $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.