Theoretische Teilchenphysik

Hans-Werner Hammer
Martin Ebert (mebert@theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
5. Übung 1. Februar

Aufgabe 1 Myonzerfall

Wir betrachten den (schwachen) Zerfall eines Myons

$$\mu^-(p) \to e^-(p') + \bar{\nu}_e(k') + \nu_\mu(k). \tag{1}$$

Dies ist der Hauptzerfallskanal mit einem Verzweigungsverhältnis $\Gamma(\mu \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)/\Gamma_{\text{tot}} \approx 99\%$. Das zugehörige Feynmandiagramm ist in Abbildung 1 dargestellt.

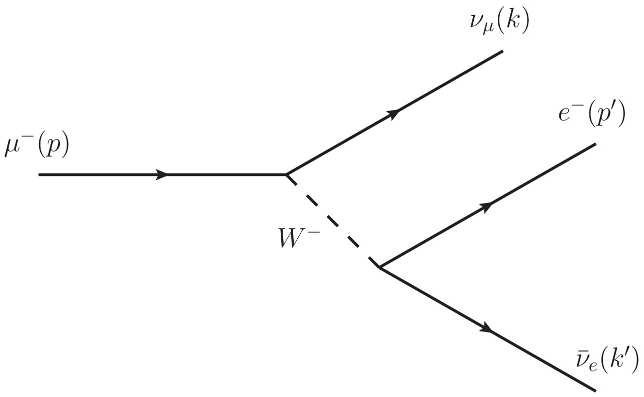

Abbildung 1: Feynmandiagramm zum dominanten Myonzerfallskanal

Die typische Energie bei welcher der Zerfall stattfindet, ist in der Größenordung der Myonmasse ($m_\mu \approx 106$ MeV) und damit deutlich geringer als die $W^\pm$-Masse ($m_{W^\pm} \approx 80$ GeV). Daher kann die schwache Wechselwirkung für diesen Prozess in guter Näherung durch eine Punktwechselwirkung mit der Fermi-Kopplungskonstante G_F beschrieben werden.

(a) Geben Sie mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Feynmanregeln das invariante Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}$ zu führender Ordung an.

Für die differentielle Zerfallsrate gilt

$$d\Gamma = \frac{1}{2E}\overline{|\mathcal{M}|^2} d\text{LIPS}.$$

Hierbei ist E die Energie des Myons, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ das über den Anfangsspin gemittelte und die Endzustandsspins summierte Betragsquadrat des invarianten Übergangsmatrixelements und dLIPS der lorentzinvariante Phasenraum. Der Phasenraum ist gegeben durch (vgl. Übung 4)

$$d\text{LIPS} = \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k - k'), \tag{2}$$

wobei gilt $k^0 \equiv \omega$, $k'^0 \equiv \omega'$ und $p'^0 \equiv E'$.

(b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Identität

$$\int \frac{d^3k}{2\omega} = \int d^4k\ \theta(k^0)\delta(k^2)$$

und folgern Sie für den Phasenraum

$$d\text{LIPS} = \frac{1}{(2\pi)^5}\frac{d^3p'}{2E'}\frac{d^3k'}{2\omega'}\theta(E-E'-\omega')\delta\left((p-p'-k')^2\right).$$

(c) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **(a)**, dass gilt (Hinweise!)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = 64G_F^2(k\cdot p')(k'\cdot p).$$

Wir begeben uns nun in das Ruhesystem des Myons ($\Rightarrow p = (m,0,0,0)$) und vernachlässigen die Masse des Elektrons.

(d) Überprüfen Sie unter Berücksichtigung der Viererimpulserhaltung ($p = p' + k + k'$), dass gilt

$$2(k\cdot p')(k'\cdot p) \approx (k+p')^2(k'\cdot p) = (p-k')^2(k'\cdot p) = (m^2-2m\omega')m\omega'.$$

Aus den vorhergehenden Teilaufgaben folgt für die differentielle Zerfallsrate

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{2m\pi^5}\frac{d^3p'}{2E'}\frac{d^3k'}{2\omega'}m\omega'(m^2-2m\omega')\delta(m^2-2mE'-2m\omega'+2E'\omega'(1-\cos\vartheta))\theta(m-E'-\omega'),$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Trajektorien des e^- und des $\bar{\nu}_e$ ist. Das Integrationsmaß $d^3p'd^3k'$ kann in Kugelkoordinaten umgeschrieben werden zu

$$d^3p'd^3k' = 4\pi E'^2 dE' 2\pi\omega'^2 d\omega' d\cos\vartheta.$$

Es wurde erneut ausgenutzt, dass die Elektronmasse vernachlässigbar ist, also gilt $E' \approx |\mathbf{p}'|$. Führt man nun die Integration über $\cos\vartheta$ unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Deltadistribution

$$\delta(\ldots - 2E'\omega'\cos\vartheta) = \frac{1}{2E'\omega'}\delta(\ldots - \cos\vartheta)$$

aus, so werden die Energien auf die Bereiche

$$\frac{m}{2} - E' \leq \omega' \leq \frac{m}{2},$$
$$0 \leq E' \leq \frac{m}{2}$$

eingeschränkt. Der Ausdruck für die differentielle Zerfallsrate vereinfacht sich zu

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{2\pi^3}dE'd\omega' m\omega'(m-2\omega').$$

(e) Führen Sie die Integration über ω' und E' aus, um einen Ausdruck für die Zerfallsrate des Myons zu erhalten.

(f) Lösen Sie den Ausdruck für die Zerfallsrate nach der Fermi-Kopplungskonstante G_F auf und berechnen Sie deren Wert. Benutzen Sie für die Myonlebensdauer $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$s.

Aus analogen Rechnungen zum β-Zerfall findet man eine gute Übereinstimmung für den Wert von G_F. Abweichungen lassen sich durch das Mischen von Quarkzuständen erklären (CKM-Matrix).

<u>HINWEIS:</u>

- $\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m$
- $\sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m$
- $\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2\right]\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{p}_4\right] = 256(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)$
- $\delta(g(x)) = \sum_{g(x_i)=0} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$