Theoretische Teilchenphysik

Hans-Werner Hammer
Martin Ebert (mebert@theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
6. Übung 12. Februar

Aufgabe 1 Lokale Eichinvarianz der schwachen Wechselwirkung

Wir betrachten die Diracgleichung für die leichteste Leptonenfamilie, sprich die des Elektrons und Elektronneutrinos. Vernachlässigt man die Masse des Elektrons, können wir auf links- und rechtshändige Zustände projizieren und die linkshändigen Zustände in einem schwachen Isospindublett zusammenfassen

$$\bar{e} i\gamma^\mu \partial_\mu e + \bar{\nu}_e i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_e = 0 = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{\nu}_{eR} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eR},$$

wobei

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten im Folgenden die Diracgleichung für die linkshändigen Zustände. Diese besitzt eine globale $SU(2)_L$-Symmetrie, d.h. ist invariant unter Transformationen

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix} \to \psi'_L = U_L \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix} \equiv \exp\left(ig\frac{\sigma_i}{2}\alpha_i\right)\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

mit einer Kopplungskonstante g und den Paulimatrizen σ_i. Wir gehen nun zu lokalen $SU(2)_L$-Transformationen über, ersetzen also

$$\alpha_i \to \alpha_i(x)$$

und führen die kovariante Ableitung ein

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\sigma_i}{2}W_\mu^i,$$

wobei W_μ^i sogenannte Eichfelder sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Diracgleichung invariant unter lokalen $SU(2)_L$-Transformationen ist, wenn für W_μ^i gilt

$$W_\mu^i \to W_\mu^i + \partial_\mu \alpha_i(x) - g\epsilon_{ijk}\alpha_j(x)W_\mu^k.$$

Benutzen Sie dafür infinitesimal kleine $\alpha_i(x)$.

(b) Überprüfen Sie, dass der Term

$$\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}$$

mit

$$W_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k$$

ebenfalls invariant unter obiger Transformation ist.

(c) Überzeugen Sie sich, dass $W_\mu^i W_i^\mu$ nicht eichinvariant ist.

Neben der $SU(2)_L$-Gruppe des schwachen Isospins, betrachtet man im Standardmodell zusätzlich die Gruppe $U(1)_Y$ der schwachen Hyperladung. Um lokale Eichinvarianz zu gewährleisten, sind dann vier Eichfelder nötig. Linearkombinationen aus diesen, können mit den drei Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung und mit dem Photon identifiziert werden. Massenterme, das sind solche wie in Teilaufgabe **(c)**, sind nicht mit der lokalen Eichinvarianz vereinbar. Um die Massen der Fermionen und schwachen Eichbosonen des Standardmodells zu erklären, wird der Higgs-Mechanismus verwendet.

Aufgabe 2 Neutrinooszillationen

Bei Fusionsprozessen innerhalb der Sonne werden Neutrinos in großer Anzahl emittiert. Diese Neutrinos können auf der Erde nachgewiesen werden. Man stellt jedoch fest, dass der auf der Erde ankommende Neutrinofluss deutlich geringer ausfällt als aus Vorhersagen, die auf der Leuchtkraft der Sonne beruhen, erwartet. Dieses Phänomen wird solares Neutrinodefizit genannt. Ein möglicher Erklärungsansatz sind Neutrinooszillationen. Hierbei wird zwischen Massen- und Flavor-Eigenzuständen unterschieden, die wir mit $|\nu_i\rangle$ bzw. $|\nu_\alpha\rangle$ bezeichnen. Mittels einer unitären Mischungsmaxtrix, ähnlich der CKM-Matrix, können diese Zustände ineinander transformiert werden

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}|\nu_i\rangle.$$

(a) Geben Sie, ausgehend von stationären Masseneigenzuständen $|\nu_i\rangle$, welche bei $t = x = 0$ emittiert werden, einen Ausdruck für $|\nu_i(x,t)\rangle$ an.

(b) Wie lautet die relativistische Dispersionsrelation? Entwickeln Sie diese für hochrelativistische Teilchen ($m \ll p$) bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in m/p.

Ein Neutrinodetektor stehe im Abstand L von einer Quelle, welche Neutrinos im Flavorzustand $|\nu_\alpha\rangle$ emittiert, entfernt.

(c) Zeigen Sie, dass die Amplitude für den Nachweis eines Neutrinos im Zustand β gegeben ist als

$$A(\alpha \to \beta)(L) = \sum_i U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \exp\left(i \frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}\right).$$

Benutzen Sie, dass für hochrelativistische Teilchen gilt $v \approx 1 (= c)$ und $p \approx E$.

(d) Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeit, P, in Abhängigkeit der Differenzen der Massenquadrate $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den ursprünglichen Flavor zu finden?

(e) Angenommen es existieren zwei Flavor und ein Mischungswinkel θ. Geben Sie einen Ausdruck für U an. Berechnen Sie $P(\alpha \to \beta)$ und $P(\alpha \to \alpha)$. Unter welchen Umständen kann ein Flavor vollkommen in den anderen umgewandelt werden?