Wiederholung:

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m\,\omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 \hat{x}^2$
- neue Operatoren: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}$,

Wiederholung:

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m\,\omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 \hat{x}^2$
- neue Operatoren: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,,$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right), \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$$

Wiederholung:

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$
- neue Operatoren: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}$,

  $\Rightarrow \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$
- Eigenzustände: $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{H}|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \omega^2 \hat{x}^2$
- neue Operatoren: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,,$

  $\Rightarrow \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = 1$
- Eigenzustände: $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{H}|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$
  - $\langle n|n\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \equiv \langle \alpha|\alpha\rangle \geq 0$
  - $\hat{a}^\dagger \hat{a}\, (\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger |n\rangle) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle \sim |n+1\rangle$ (Aufsteigeoperator)
  - $\hat{a}^\dagger \hat{a}\, (\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}|n\rangle \sim |n-1\rangle$ (Absteigeoperator)

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eindim. harmonischer Oszillator: $\hat{V} = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \hat{x}^2$
- zeitunabh. SG: $\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \omega^2 \hat{x}^2$
- neue Operatoren: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{2\hbar m\omega}\,,$

  $\Rightarrow \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$
- Eigenzustände: $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{H}|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$
  - $\langle n|n\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \equiv \langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$
  - $\hat{a}^\dagger \hat{a}\,(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle \sim |n+1\rangle$ (Aufsteigeoperator)
  - $\hat{a}^\dagger \hat{a}\,(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}|n\rangle \sim |n-1\rangle$ (Absteigeoperator)
- Nur dann kein Widerspruch, wenn n ganzzahlig und $\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$

  $\Rightarrow \quad \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |0\rangle$ niedrigster Zustand (Grundzustand)