Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- θ-Anteil: $\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v(\theta)}{\partial\theta}\right) + (\lambda \sin^2\theta - m^2)v(\theta) = 0$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- θ-Anteil: $\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v(\theta)}{\partial\theta}\right) + (\lambda \sin^2\theta - m^2) v(\theta) = 0$
- Lösung: $v(\theta) \sim P_\ell^m(\cos\theta)$
  - $P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_\ell(x)$ „zugeordnete Legendre-Polynome"
  - $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d}{dx}^\ell (x^2-1)^\ell$ „Legendre-Polynome"
  - $\lambda = \ell(\ell+1)\,, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots$
  - $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- θ-Anteil: $\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v(\theta)}{\partial\theta}\right) + (\lambda \sin^2\theta - m^2)v(\theta) = 0$
- Lösung: $v(\theta) \sim P_\ell^m(\cos\theta)$
  - $P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_\ell(x)$ „zugeordnete Legendre-Polynome"
  - $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d}{dx}^\ell (x^2-1)^\ell$ „Legendre-Polynome"
  - $\lambda = \ell(\ell+1)\,, \quad \ell = 0, 1, 2, ...$
  - $m = -\ell, -\ell+1, ..., \ell-1, \ell$
- vollständiger Winkelanteil: $Y_\ell^m(\theta,\varphi) \sim P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$
  - $\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_\ell^{m\,*}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$
  - $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^{m\,*}(\theta,\varphi)\, Y_\ell^m(\theta',\varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\varphi-\varphi')$

Beispiele

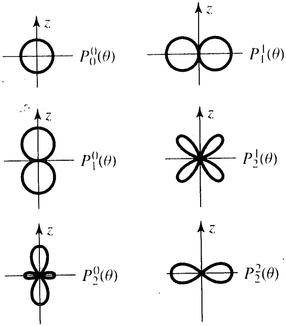
(aus: D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics,* Pearson, 2005.)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

TABLE 4.2: Some associated Legendre functions, $P_l^m(\cos\theta)$: (a) functional form, (b) graphs of $r = P_l^m(\cos\theta)$ (in these plots r tells you the magnitude of the function in the direction θ; each figure should be rotated about the z-axis).

$P_0^0 = 1$	$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
$P_1^1 = \sin\theta$	$P_3^3 = 15\sin\theta(1-\cos^2\theta)$
$P_1^0 = \cos\theta$	$P_3^2 = 15\sin^2\theta\,\cos\theta$
$P_2^2 = 3\sin^2\theta$	$P_3^1 = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$
$P_2^1 = 3\sin\theta\,\cos\theta$	$P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

(a)



(b)

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Radialanteil: $R(r) = \frac{u(r)}{r}$
  - Normierung: $\int_0^\infty dr\, u^*(r)u(r) = 1$

Wiederholung:

- Radialanteil: $R(r) = \frac{u(r)}{r}$
  - Normierung: $\int_0^\infty dr\, u^*(r) u(r) = 1$
- Radialgleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r) \right] u(r) = E u(r)$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Radialanteil: $R(r) = \frac{u(r)}{r}$
  - Normierung: $\int_0^\infty dr\, u^*(r) u(r) = 1$
- Radialgleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\right] u(r) = E u(r)$
- effektives Potenzial: $V_{eff}(r) = V(r) + V_{zentrifugal}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$

Wiederholung:

- Radialanteil: $R(r) = \frac{u(r)}{r}$
  - Normierung: $\int_0^\infty dr\, u^*(r)u(r) = 1$
- Radialgleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\right] u(r) = Eu(r)$
- effektives Potenzial: $V_{eff}(r) = V(r) + V_{zentrifugal}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$
- Wasserstoff-Atom: $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Radialanteil: $R(r) = \frac{u(r)}{r}$
  - Normierung: $\int_0^\infty dr\, u^*(r)u(r) = 1$
- Radialgleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\right] u(r) = Eu(r)$
- effektives Potenzial: $V_{eff}(r) = V(r) + V_{zentrifugal}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$
- Wasserstoff-Atom: $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
- Radialgleichung: $\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{E}{E_R}\right) u(\rho) = 0$
  - $\rho = \frac{r}{a_B}$, $a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,53$ Å „Bohr'scher Radius"
  - $E_R = \frac{\hbar^2}{2ma_B^2} = 13,6$ eV „Rydberg-Energie"