Wiederholung:

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$
  - $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \,, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \,, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$
  - $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \,, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \,, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$
- Kommutatoren:
  - $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \,, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \,, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$

    $\Rightarrow$ keine gemeinsamen Eigenfunktionen!

Wiederholung:

- Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$
  - $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \,, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \,, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$
- Kommutatoren:
  - $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \,, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \,, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$

    $\Rightarrow$ keine gemeinsamen Eigenfunktionen!
  - $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0 \,, \qquad \hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

    $\Rightarrow$ gemeinsame Eigenfunktionen von $\hat{\vec{L}}^2$ und *einer* Komponente L_k

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$
  - $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y\ , \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\ , \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$
- Kommutatoren:
  - $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z\ , \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x\ , \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$

    $\Rightarrow$ keine gemeinsamen Eigenfunktionen!
  - $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0\ , \qquad \hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

    $\Rightarrow$ gemeinsame Eigenfunktionen von $\hat{\vec{L}}^2$ und *einer* Komponente L_k
- Auf- und Absteigeoperatoren: $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

Wiederholung:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gemeinsame Eigenzustände von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$:
  - $\hat{\vec{L}}^2|\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2\,|\ell, m\rangle\,, \qquad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$
  - $\hat{L}_z|\ell, m\rangle = m\hbar\,|\ell, m\rangle\,, \qquad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$
  - $\hat{L}_\pm|\ell, m\rangle \sim |\ell, m\pm 1\rangle\,, \qquad \hat{L}_+|\ell, \ell\rangle = \hat{L}_-|\ell, -\ell\rangle = 0$

Wiederholung:

- gemeinsame Eigenzustände von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$:
  - $\hat{\vec{L}}^2|\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2\,|\ell, m\rangle\,, \qquad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$
  - $\hat{L}_z|\ell, m\rangle = m\hbar\,|\ell, m\rangle\,, \qquad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$
  - $\hat{L}_\pm|\ell, m\rangle \sim |\ell, m\pm 1\rangle\,, \qquad \hat{L}_+|\ell, \ell\rangle = \hat{L}_-|\ell, -\ell\rangle = 0$
- Operatoren im Ortsraum (Kugelkoordinaten):
  - $\hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\,, \qquad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$
  - Vergleich mit der Winkelgleichung für Zentralpotenziale

    $\rightarrow$ gemeinsame Eigenfunktionen: $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$

    $\Rightarrow$ ℓ ganzzahlig: 0, 1, 2, ...