Wiederholung

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtwellenfunktion, z.B. eines Elektrons ($s = \frac{1}{2}$):

  $\Psi_{ges}(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)\chi(t)$

  - $\psi(\vec{x}, t)$ Ortsraum-Wellenfunktion
  - $\chi(t) = \begin{pmatrix} c_\uparrow(t) \\ c_\downarrow(t) \end{pmatrix}$ Spinraum-Wellenfunktion

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtwellenfunktion, z.B. eines Elektrons ($s = \frac{1}{2}$):

  $$\Psi_{ges}(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)\chi(t)$$

  - $\psi(\vec{x}, t)$ Ortsraum-Wellenfunktion
  - $\chi(t) = \begin{pmatrix} c_\uparrow(t) \\ c_\downarrow(t) \end{pmatrix}$ Spinraum-Wellenfunktion

- Quantenzahlen des Wasserstoff-Atoms: $(\underbrace{n, \ell, m}_{Ort}, \underbrace{m_s}_{Spin})$ (+ Kernspin)

Wiederholung: Addition von Spins

- Beispiel: Elektron und Proton mit Spin-Operatoren $\hat{\vec{S}}^{(e)}$ und $\hat{\vec{S}}^{(p)}$
  - $[\hat{S}_i^{(e)}, \hat{S}_j^{(p)}] = 0$

Wiederholung: Addition von Spins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: Elektron und Proton mit Spin-Operatoren $\hat{\vec{S}}^{(e)}$ und $\hat{\vec{S}}^{(p)}$
  - $[\hat{S}_i^{(e)}, \hat{S}_j^{(p)}] = 0$
- Gesamt-Spin: $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}^{(e)} + \hat{\vec{S}}^{(p)}$
  - $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \ , \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x \ , \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$
  - $[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_x] = [\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_y] = [\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_z] = 0$

Wiederholung: Addition von Spins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: Elektron und Proton mit Spin-Operatoren $\hat{\vec{S}}^{(e)}$ und $\hat{\vec{S}}^{(p)}$
  - $[\hat{S}_i^{(e)}, \hat{S}_j^{(p)}] = 0$
- Gesamt-Spin: $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}^{(e)} + \hat{\vec{S}}^{(p)}$
  - $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \ , \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x \ , \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$
  - $[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_x] = [\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_y] = [\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_z] = 0$
- gemeinsame Eigenzustände von $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$:
  - Spin 0 („Singulett"): $|s = 0, m_s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\right)$
  - Spin 1 („Triplett"): $\left\{\begin{array}{lcl} |s = 1, m_s = 1\rangle & = & |\uparrow,\uparrow\rangle \\ |s = 1, m_s = 0\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle\right) \\ |s = 1, m_s = -1\rangle & = & |\downarrow,\downarrow\rangle \end{array}\right.$

Wiederholung

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$
  - Wahrsch.-dichte, zur Zeit t Teilchen 1 bei $\vec{x}_1$ und Teilchen 2 bei $\vec{x}_2$ zu finden: $|\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$
  - Wahrsch.-dichte, zur Zeit t Teilchen 1 bei $\vec{x}_1$ und Teilchen 2 bei $\vec{x}_2$ zu finden: $|\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2$
- Identische Teilchen:
  - Teilchen mit gleicher Masse, Ladung etc. sind in der QM grundsätzlich ununterscheidbar $\Rightarrow$ $|\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2 = |\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)|^2$
  - Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin): $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)|$
  - Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin): $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = -\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)|$

Wiederholung

- Beispiel: zwei Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(\vec{x}_1) + U(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_i + U(\vec{x}_i)$$

- zeitunabhängige SG: $\hat{H}\varphi(\vec{x}_1, x_2) = E\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Ein-Teilchen-Lösungen: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + U(\vec{x})\right) \varphi_a(\vec{x}) = E_a \varphi_a(\vec{x})$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: zwei Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(\vec{x}_1) + U(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_i + U(\vec{x}_i)$$

- zeitunabhängige SG: $\hat{H}\varphi(\vec{x}_1, x_2) = E\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Ein-Teilchen-Lösungen: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + U(\vec{x})\right) \varphi_a(\vec{x}) = E_a \varphi_a(\vec{x})$
- Zwei-Teilchen-Lösungen:
  - unterscheidbare Teilchen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2)$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: zwei Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(\vec{x}_1) + U(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_i + U(\vec{x}_i)$$

- zeitunabhängige SG: $\hat{H}\varphi(\vec{x}_1, x_2) = E\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

- Ein-Teilchen-Lösungen: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + U(\vec{x})\right) \varphi_a(\vec{x}) = E_a \varphi_a(\vec{x})$

- Zwei-Teilchen-Lösungen:
  - unterscheidbare Teilchen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2)$
  - ununterscheidbare Bosonen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) + \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\right)$

Wiederholung

- Beispiel: zwei Teilchen ohne Wechselwirkung untereinander

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(\vec{x}_1) + U(\vec{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle_i + U(\vec{x}_i)$$

- zeitunabhängige SG: $\hat{H}\varphi(\vec{x}_1, x_2) = E\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Ein-Teilchen-Lösungen: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + U(\vec{x})\right) \varphi_a(\vec{x}) = E_a \varphi_a(\vec{x})$
- Zwei-Teilchen-Lösungen:
  - unterscheidbare Teilchen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2)$
  - ununterscheidbare Bosonen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) + \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\right)$
  - ununterscheidbare Fermionen: $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\right)$