Wiederholung

Wiederholung

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion ununterscheidbarer Fermionen:

  $$\varphi_{ab}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\big) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{aa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

  keine zwei identischen Fermionen im gleichen Zustand (Pauli-Prinzip)!

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion ununterscheidbarer Fermionen:

  $$\varphi_{ab}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\big) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{aa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

  keine zwei identischen Fermionen im gleichen Zustand (Pauli-Prinzip)!

- „Austausch-Kräfte": $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\substack{B\\F}} = \langle (x_1 - x_2^2 \rangle_{untersch.} \mp 2 |\langle a|\hat{x}|b\rangle|^2$
  - Bosonen rücken näher zuammen,

    Fermionen rücken von einander ab (jeweils bei gleichem Spin)

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion ununterscheidbarer Fermionen:

  $$\varphi_{ab}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\big) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{aa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

  keine zwei identischen Fermionen im gleichen Zustand (Pauli-Prinzip)!

- „Austausch-Kräfte": $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\substack{B\\F}} = \langle (x_1 - x_2^2 \rangle_{untersch.} \mp 2|\langle a|\hat{x}|b\rangle|^2$
  - Bosonen rücken näher zuammen,

    Fermionen rücken von einander ab (jeweils bei gleichem Spin)

- „Berücksichtigung des Spins:
  - Die Gesamtwellenfunktion muss bei gleichzeitiger Vertauschung der Teilchen-Orte und -Spins für Bosonen symmetrisch und für Fermionen antisymmetrisch sein.

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zwei-Teilchen-Wellenfunktion ununterscheidbarer Fermionen:

  $$\varphi_{ab}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\big) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{aa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

  keine zwei identischen Fermionen im gleichen Zustand (Pauli-Prinzip)!

- „Austausch-Kräfte": $\big\langle (x_1 - x_2)^2 \big\rangle_{\substack{B \\ F}} = \big\langle (x_1 - x_2^2 \big\rangle_{untersch.} \mp 2 \big| \langle a | \hat{x} | b \rangle \big|^2$
  - Bosonen rücken näher zuammen,

    Fermionen rücken von einander ab (jeweils bei gleichem Spin)

- „Berücksichtigung des Spins:
  - Die Gesamtwellenfunktion muss bei gleichzeitiger Vertauschung der Teilchen-Orte und -Spins für Bosonen symmetrisch und für Fermionen antisymmetrisch sein.
  - Bsp.: zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen

    $S = 0$: antisymm. Spin-Wellenfkt. $\Rightarrow$ symm. Orts-Wellenfkt.

    $S = 1$: symm. Spin-Wellenfkt. $\Rightarrow$ antisymm. Orts-Wellenfkt.

Wiederholung

- drei nicht-wechselwirkende Teilchen im eindim. harmonischen Oszillator
  - Gesamtenergie: $E = \hbar\omega \left(n_A + n_B + n_C + \frac{3}{2}\right)$
- Welche Zustände $|n_A, n_B, n_C\rangle$ gibt es mit $E = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad \Leftrightarrow \quad n_A + n_B + n_C = 3$?

Wiederholung

- drei nicht-wechselwirkende Teilchen im eindim. harmonischen Oszillator
  - Gesamtenergie: $E = \hbar\omega \left(n_A + n_B + n_C + \frac{3}{2}\right)$
- Welche Zustände $|n_A, n_B, n_C\rangle$ gibt es mit $E = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad \Leftrightarrow \quad n_A + n_B + n_C = 3$?
- unterscheidbare Teilchen:

$$|3,0,0\rangle,\ |0,3,0\rangle,\ |0,0,3\rangle,$$

$$|2,1,0\rangle,\ |1,0,2\rangle,\ |0,2,1\rangle,\ |0,1,2\rangle,\ |1,2,0\rangle,\ |2,0,1\rangle,$$

$$|1,1,1\rangle$$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- drei nicht-wechselwirkende Teilchen im eindim. harmonischen Oszillator
  - Gesamtenergie: $E = \hbar\omega \left(n_A + n_B + n_C + \frac{3}{2}\right)$
- Welche Zustände $|n_A, n_B, n_C\rangle$ gibt es mit $E = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad \Leftrightarrow \quad n_A + n_B + n_C = 3$?
- unterscheidbare Teilchen:

$$|3,0,0\rangle,\ |0,3,0\rangle,\ |0,0,3\rangle,$$
$$|2,1,0\rangle,\ |1,0,2\rangle,\ |0,2,1\rangle,\ |0,1,2\rangle,\ |1,2,0\rangle,\ |2,0,1\rangle,$$
$$|1,1,1\rangle$$

- ununterscheidbare Bosonen:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|3,0,0\rangle + |0,3,0\rangle + |0,0,3\rangle\right),$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|2,1,0\rangle + |1,0,2\rangle + |0,2,1\rangle + |0,1,2\rangle + |1,2,0\rangle + |2,0,1\rangle\right),$$
$$|\psi_2\rangle = |1,1,1\rangle$$

Wiederholung

- drei nicht-wechselwirkende Teilchen im eindim. harmonischen Oszillator
  - Gesamtenergie: $E = \hbar\omega\left(n_A + n_B + n_C + \frac{3}{2}\right)$
- Welche Zustände $|n_A, n_B, n_C\rangle$ gibt es mit $E = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad \Leftrightarrow \quad n_A + n_B + n_C = 3$?
- unterscheidbare Teilchen:

$$|3,0,0\rangle,\ |0,3,0\rangle,\ |0,0,3\rangle,$$
$$|2,1,0\rangle,\ |1,0,2\rangle,\ |0,2,1\rangle,\ |0,1,2\rangle,\ |1,2,0\rangle,\ |2,0,1\rangle,$$
$$|1,1,1\rangle$$

- ununterscheidbare Bosonen:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|3,0,0\rangle + |0,3,0\rangle + |0,0,3\rangle\right),$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|2,1,0\rangle + |1,0,2\rangle + |0,2,1\rangle + |0,1,2\rangle + |1,2,0\rangle + |2,0,1\rangle\right),$$
$$|\psi_2\rangle = |1,1,1\rangle$$

- ununterscheidbare Fermionen:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|2,1,0\rangle + |1,0,2\rangle + |0,2,1\rangle - |0,1,2\rangle - |1,2,0\rangle - |2,0,1\rangle\right),$$