Wiederholung

Wiederholung

- System mit Ein-Teilchen-Zuständen E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
  jeweils d_k-fach entartet
- Wieviele Möglichkeiten $Q(N_1, N_2, \ldots)$ gibt es, N Teilchen so auf diese Zustände zu verteilen, dass jeweils N_k Teilchen die Energie E_k besitzen?

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- System mit Ein-Teilchen-Zuständen E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
  jeweils d_k-fach entartet
- Wieviele Möglichkeiten $Q(N_1, N_2, \ldots)$ gibt es, N Teilchen so auf diese Zustände zu verteilen, dass jeweils N_k Teilchen die Energie E_k besitzen?
  - identische Fermionen:
    $$Q_{Fermion}(N_1, N_2, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{d_n}{N_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n!(d_n - N_n)!}$$
  - identische Bosonen:
    $$Q_{Boson}(N_1, N_2, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{N_n + d_n - 1}{N_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n!(d_n - 1)!}$$
  - unterscheidbare Teilchen:
    $$Q_{untersch}(N_1, N_2, \ldots) = N_n! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}$$

Wiederholung

- System mit Ein-Teilchen-Zuständen E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
  jeweils d_k-fach entartet
- N Teilchen mit Gesamtenergie E

Wiederholung

- System mit Ein-Teilchen-Zuständen E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
  jeweils d_k-fach entartet
- N Teilchen mit Gesamtenergie E
- Wahrscheinlichste Konfiguration $(N_1, N_2, \ldots)$:
  - maximiere $Q(N_1, N_2, \ldots)$
  - unter den Nebenbedingungen: $\sum_n N_n = N$ und $\sum_n N_n E_n = E$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- System mit Ein-Teilchen-Zuständen E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, jeweils d_k-fach entartet
- N Teilchen mit Gesamtenergie E
- Wahrscheinlichste Konfiguration $(N_1, N_2, \ldots)$:
  - maximiere $Q(N_1, N_2, \ldots)$
  - unter den Nebenbedingungen: $\sum_n N_n = N$ und $\sum_n N_n E_n = E$
- Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren:
  - $G(N_1, N_2, \ldots, \alpha, \beta) = \ln Q(N_1, N_2, \ldots) + \alpha[N - \sum_n N_n] + \beta[E - \sum_n N_n E_n]$
  - $\frac{\partial G}{\partial N_1} = \frac{\partial G}{\partial N_2} = \ldots \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial \beta} \overset{!}{=} 0$

Stirling'sche Näherungsformel

- $\ln(N!) \;\approx\; N\ln(N) - N \quad$ für $N \gg 1$

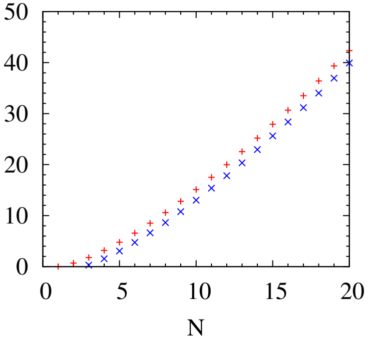
Stirling'sche Näherungsformel

- $\ln(N!) = \sum_{k=1}^{N} \ln(k) \approx \int_0^N dx \, \ln(x) = (x \ln(x) - x) \big|_0^N = N \ln(N) - N$

Stirling'sche Näherungsformel

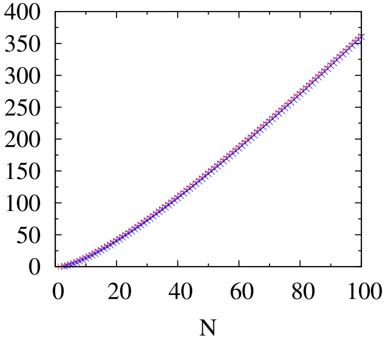
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N$ für $N \gg 1$



Stirling'sche Näherungsformel

- $\ln(N!) \;\approx\; N\ln(N) - N \quad$ für $N \gg 1$



Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ergebnisse für die wahrscheinlichste Konfiguration:
  - identische Bosonen: $N_n \approx \frac{d_n}{e^{\alpha+\beta E_n}-1}$
  - identische Fermionen: $N_n \approx \frac{d_n}{e^{\alpha+\beta E_n}+1}$
  - unterscheidbare Teilchen: $N_n \approx d_n\, e^{-(\alpha+\beta E_n)}$

- Ergebnisse für die wahrscheinlichste Konfiguration:
  - identische Bosonen: $N_n \approx \frac{d_n}{e^{\alpha+\beta E_n}-1}$
  - identische Fermionen: $N_n \approx \frac{d_n}{e^{\alpha+\beta E_n}+1}$
  - unterscheidbare Teilchen: $N_n \approx d_n\, e^{-(\alpha+\beta E_n)}$
- Bestimmung der Parameter α und β durch die Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_n N_n(\alpha,\beta) \overset{!}{=} N \\[2ex] \sum\limits_n N_n(\alpha,\beta) E_n \overset{!}{=} E \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \alpha = \alpha(N,E), \quad \beta = \beta(N,E)$$