Wiederholung:

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung für $V = 0$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi(\vec{x}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t)$

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung für $V = 0$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t)$
- einfachste Lösung: ebene Welle

$$\psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}, \qquad \omega_{\vec{k}} := \frac{\hbar \vec{k}^{\,2}}{2m}$$

  - nicht normierbar: $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |A|^2 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x \, |\psi(\vec{x}, t)|^2 \to \infty$

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung für $V = 0$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$
- einfachste Lösung: ebene Welle

$$\psi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}, \qquad \omega_{\vec{k}} := \frac{\hbar \vec{k}^{\,2}}{2m}$$

  - nicht normierbar: $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |A|^2 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x\, |\psi(\vec{x}, t)|^2 \;\to\; \infty$
  - vorläufige Beschränkung auf endl. Volumen $\mathcal{V} \quad \to \quad A = \frac{1}{\sqrt{V}}$

$$\Rightarrow \quad |\psi(\vec{x}, t)|^2 = \frac{1}{\mathcal{V}} = const.$$

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung für $V = 0$: $\quad -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t)$
- einfachste Lösung: ebene Welle

$$\psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}, \qquad \omega_{\vec{k}} := \frac{\hbar\vec{k}^{\,2}}{2m}$$

  - nicht normierbar: $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |A|^2 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x\, |\psi(\vec{x}, t)|^2 \rightarrow \infty$
  - vorläufige Beschränkung auf endl. Volumen $\mathcal{V} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}$

$$\Rightarrow \quad |\psi(\vec{x}, t)|^2 = \frac{1}{\mathcal{V}} = const.$$

- Interpretation:
  - Impuls genau bekannt: $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
  - Ort (innerhalb des Hilfsvolumens $\mathcal{V}$) völlig unbekannt
  - Extremfall der Heisenberg'schen Unschärferelation $\triangle x_i \triangle p_i \geq \frac{\hbar}{2}$

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wellenpakete: $$\psi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \phi(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} \qquad (1)$$
  - kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichem $\vec{k}$
  - löst ebenfalls die freie Schrödinger-Gleichung (Superpositionsprinzip)

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wellenpakete: $\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \, \phi(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}$ (1)
  - kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichem $\vec{k}$
  - löst ebenfalls die freie Schrödinger-Gleichung (Superpositionsprinzip)
- Fouriertransformation: $\phi(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \, \psi(\vec{x}, 0) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ (2)

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wellenpakete: $\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, \phi(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}$ (1)
  - kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichem $\vec{k}$
  - löst ebenfalls die freie Schrödinger-Gleichung (Superpositionsprinzip)
- Fouriertransformation: $\phi(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\, \psi(\vec{x}, 0)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ (2)
- kein „scharfer” Impuls, aber räumliche Lokalisierung möglich:
  - gebe beliebige Wellenform $\psi(\vec{x}, 0)$ zur Zeit $t = 0$ vor
  - berechne $\phi(\vec{k})$ aus (2)
  - berechne Zeitentwicklung $\psi(\vec{x}, t)$ aus (1)

Wiederholung: Freie Teilchen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel: Gauß'sches Wellenpaket in einer Dimension
  - $\psi(\vec{x}, 0) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \, e^{ik_0 x} \quad \Rightarrow \quad \phi(k) \sim \exp\left(-\frac{b^2}{2}(k - k_0)^2\right)$
  - Je kleiner b, desto schärfer ist $\psi(\vec{x}, 0)$ um $x = 0$ lokalisiert, aber desto breiter ist $\phi(k)$ um $k = k_0$ verteilt.

Wiederholung: Freie Teilchen

- Beispiel: Gauß'sches Wellenpaket in einer Dimension
  - $\psi(\vec{x},0) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) e^{ik_0 x} \quad \Rightarrow \quad \phi(k) \sim \exp\left(-\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2\right)$
  - Je kleiner b, desto schärfer ist $\psi(\vec{x},0)$ um $x = 0$ lokalisiert, aber desto breiter ist $\phi(k)$ um $k = k_0$ verteilt.
  - Zeitentwicklung: $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 \sim \exp\left(-\frac{(x - x_{max}(t))^2}{b_{eff}(t)^2}\right)$
    - $x_{max}(t)) = v_{max}\,t, \quad v_{max} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$
    - $b_{eff}(t) = b\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{m b^2}\right)^2}$ „Breitfließen" der Welle