1.5 Freie Teilchen

Betrachte den Fall $V(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}_{\hat{H}_0 \,\equiv\, \hat{T} \,=\, \text{freier Hamilton-Operator}} \Psi(\vec{x},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)$$

a) ebene Wellen

Lösungsansatz: $\quad \Psi_0(\vec{x},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$

Einsetzen in die SG:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(i\vec{k})^2 A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \overset{!}{=} i\hbar(-i\omega) A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} \overset{!}{=} \hbar\omega$$

(Erinnerung: $\hbar\vec{k} = \vec{p}$ (de Broglie)

$\hbar\omega = E$ (Einstein)

$\Rightarrow \quad \frac{\vec{p}^2}{2m} \overset{!}{=} E \quad ✓ \quad (V=0)$)

$$\leadsto \quad \boxed{\Psi_0(\vec{x},t) = A\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \; ; \quad \omega_{\vec{k}} := \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}}$$

Problem: nicht normierbar, $\int d^3x\, |\Psi_0|^2 = |A|^2 \int d^3x \to \infty$

$\leadsto$ Beschränke Lösung vorläufig auf endliches Volumen V

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3x\, |\Psi_0|^2 = |A|^2 V \overset{!}{=} 1 \quad \leadsto \quad A = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Interpretation der Lösung

- Das Teilchen hat einen exakt bestimmten Impuls $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

- Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varrho_0(\vec{x},t) = |\Psi_0(\vec{x},t)|^2 = \frac{1}{V} = \text{const.}$

  Der Aufenthaltsort innerhalb des Volumens V ist also völlig unbekannt. Da wir V nur hilfsweise eingeführt haben und den Limes $V \to \infty$ betrachten müssen (Um das Teilchen wirklich auf ein endliches Volumen zu begrenzen, müssten wir ein Potenzial einführen und Randbedingungen berücksichtigen, s. später „Potenzialtopf".), befindet sich das Teilchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo im Raum.

- Dies ist ein extremer Spezialfall der Heisenberg'schen Unschärferelation $\boxed{\Delta x_i \, \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}}$, die besagt, dass Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau gemessen werden können (hier: $\Delta p_i = 0 \Rightarrow \Delta x_i \to \infty$).

b) Wellenpakete

Ebene Wellen sind physikalisch unrealistische Idealisierungen: Impulsmessungen sind nie exakt, dafür kennt man aber auch ungefähr den Ort des Teilchens (ein Detektor!).

→ Überlagere ebene Wellen mit verschiedenen Impulsen.

<u>Superpositionsprinzip:</u> (Linearität der SG)

Sind ψ_1 und ψ_2 Lösungen der SG,
dann ist es auch $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$, $c_{1,2} \in \mathbb{C}$

(Beweis: Einsetzen in die SG)

Wellenpaket: kontinuierliche Überlagerung

$$\boxed{\psi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \, \phi(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}} \qquad (*)$$

(Der Faktor $(2\pi)^{3/2}$ ist eine nützliche Konvention, s.u.)

Durch geeignete Wahl von $\phi(\vec{k})$ kann man $\psi(\vec{x},t)$ räumlich begrenzen.
⟺ Überlagerung mehrerer Impulse $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
⟹ Der Impuls des Teilchens ist dann „unscharf"!

- <u>wichtige Formel:</u>

$$\int dx \, e^{i(k-q)x} = 2\pi \, \delta(k-q) \qquad \text{(analog in höheren Dimensionen)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \, \psi(\vec{x},0) \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

$$= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \, \phi(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}}$$

$$= \int d^3k \, \phi(\vec{k}) \, \delta^3(\vec{k}-\vec{q}) = \phi(\vec{q}) \qquad (**)$$

d.h. $\phi(\vec{k})$ ist die Fourier-Transformierte von $\psi(\vec{x},0)$

$\to$ - Gebe beliebiges Wellenpaket $\psi(\vec{x},0)$ zur Zeit $t=0$ vor.

- Berechne $\phi(\vec{k})$ aus $(**)$
- Berechne $\psi(\vec{x},t)$ für beliebige Zeiten t aus $(*)$

<u>Beispiel:</u> Gauß'sches Wellenpaket in einer Dimension

<u>eine Raumdimension:</u>

$\Rightarrow$ • $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

• $\psi(x,t) = \int\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\,\phi(k)\,e^{i(kx-\omega_k t)}$, $\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$

• $\phi(k) = \int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,\psi(x,0)\,e^{-ikx}$

<u>Gauß'sches Wellenpaket:</u>

$$\psi(x,0) = N\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)e^{ik_0x}$$

$\Rightarrow$ $\phi(k) \sim \exp\left(-\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2\right)$ $\qquad$ ($\to$ Übung)

$\Rightarrow$ Je kleiner b,

- desto schärfer ist $\psi(x,0)$ um $x=0$ lokalisiert
- desto breiter ist $\phi(k)$

und umgekehrt.

zeitliche Entwicklung (→ Übung)

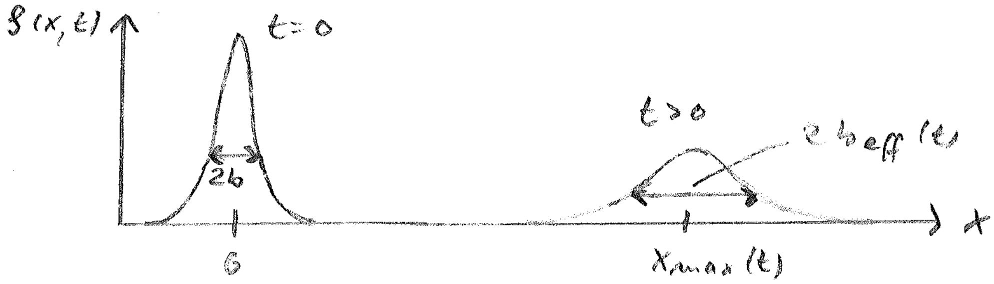
$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 \sim \exp\left(-\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{b_{eff}^2(t)}\right)$$

mit $b_{eff}(t) = b\sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{m b^2}\right)^2}$

2.) - Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte liegt bei $x_{max}(t) = \frac{\hbar k_0}{m} t \equiv v_{max}\, t$

$\Rightarrow v_{max} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$ (wie ein klass. Teilchen mit Impuls p_0)

- Die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt mit der Zeit zu, d.h. die Unsicherheit, wo das Teilchen zu finden ist, wird immer größer.



Interpretation:

$t=0$: Ort relativ scharf bestimmt

$\Rightarrow$ Impuls relativ unscharf

$\Rightarrow$ zukünftiger Ort weniger genau bekannt

$\Rightarrow$ „Breitfließen" des Wellenpakets

(Je kleiner b desto schneller wächst b_{eff}.)

charakteristische Zeitskala: $t_0 = \frac{m b^2}{\hbar}$
$(\Rightarrow \; b_{eff}(t_0) = \sqrt{2}\, b \;)$

$$\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34} \, kg \frac{m^2}{s}$$

<u>Beispiel 1:</u> Elektron im Atom

$$\left.\begin{array}{llll} m_e & = 511 \frac{keV}{c^2} & \approx & 10^{-30} \, kg \\ b & \approx 1 \, \mathring{A} & = & 10^{-10} \, m \end{array}\right\} \Rightarrow t_0 = 10^{-16} \, s$$

<u>Beispiel 2:</u> klassisches Teilchen

$$\left.\begin{array}{llll} m & = 1 \, g & = & 10^{-3} \, kg \\ b & = 1 \, \mu m & = & 10^{-6} \, m \end{array}\right\} \Rightarrow t_0 = 10^{19} \, s$$
$$= 3 \times 10^{11} \text{ Jahre}$$

(Alter des Universums: 10^{10} Jahre)

<u>1.6 Impulsraumdarstellung der Wellenfunktion</u>

Fourier-Transformierte von $\psi(\vec{x}, t)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\psi}(\vec{p}, t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}\cdot\vec{x}} \, \psi(\vec{x}, t) \\ \psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}\cdot\vec{x}} \, \tilde{\psi}(\vec{p}, t) \end{array}}$$

$\Leftarrow$

Vergleich mit dem Wellenpaket aus Abschnitt 1.5:

$$\tilde{\psi}(\vec{p}, t) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \, \phi(\vec{k}) \, e^{-i\omega_k t} \qquad (\vec{p} = \hbar \vec{k})$$