- $\tilde{\Psi}(\vec{p},t)$ = „Wellenfunktion im Impulsraum"
- $\Psi(\vec{x},t)$ und $\tilde{\Psi}(\vec{p},t)$ sind eindeutig über die Fourier-Transf. miteinander verknüpft.
  $\Rightarrow$ Sie liefern äquivalente Beschreibungen des Zustands eines Teilchens zum Zeitpkt. t.
- Normierung:

Aus $\int d^3x\, |\Psi(\vec{x},t)|^2 = 1$

folgt $\int d^3p\, |\tilde{\Psi}(\vec{p},t)|^2 = 1$ (→ Übung)

$\Rightarrow$ naheliegende Interpretation:

$\tilde{\rho}(\vec{p},t) := |\tilde{\Psi}(\vec{p},t)|^2$

ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, den Teilchenimpuls $\vec{p}$ zu messen.

1.7 Erwartungswerte und Unschärfe

Messe den Ort eines Teilchens zur Zeit t in sehr vielen unabhängigen identisch präparierten Systemen.
Mittelwert dieser Messungen:

$$\langle\vec{x}\rangle(t) = \int d^3x\, \rho(\vec{x},t)\,\vec{x} = \int d^3x\, \Psi^*(\vec{x},t)\,\vec{x}\,\Psi(\vec{x},t)$$

analog für Impulsmessungen:

$$\langle\vec{p}\rangle(t) = \int d^3p\, \tilde{\rho}(\vec{p},t)\,\vec{p} = \int d^3p\, \tilde{\Psi}^*(\vec{p},t)\,\vec{p}\,\tilde{\Psi}(\vec{p},t)$$

Wir haben $\vec{x}$ bzw $\vec{p}$ zwischen die Wellenfunktionen geschrieben, aber das ist an dieser Stelle unwichtig.

Wir wollen nun $\langle \vec{p} \rangle(t)$ mit Hilfe der Ortsraum-Wellenfunktionen ausdrücken:

$$\langle \vec{p} \rangle(t) = \int d^3p \int \frac{d^3x'}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}'}\, \psi^*(\vec{x}',t)$$

$$\cdot\; \underbrace{\vec{p} \int \frac{d^3x}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \psi(\vec{x},t)}_{\displaystyle \int \frac{d^3x}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(i\hbar \vec{\nabla} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \psi(\vec{x},t)}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \int \frac{d^3x}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)$$

$$= \int \frac{d^3x'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3x}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \psi^*(\vec{x}',t)\, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)$$

$$\cdot\; \underbrace{\int d^3p\; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}}_{(2\pi\hbar)^3\, \delta^3(\vec{x}'-\vec{x})}$$

$$= \int d^3x\; \psi^*(\vec{x},t)\, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\, \psi(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{p} \rangle(t) = \int d^3x\; \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{\vec{p}}\, \psi(\vec{x},t)$$

mit dem Impulsoperator in Ortsraumdarstellung

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \qquad \text{(vgl. S. 13!)}$$

Bemerke: Hier spielt die Reihenfolge eine Rolle: $\psi^* \hat{\vec{p}}\, \psi \neq \hat{\vec{p}}\,(\psi^*\psi)$!

Analog können wir schreiben:

$$\langle \vec{x} \rangle (t) = \int d^3p \; \tilde{\Psi}^*(\vec{p},t) \, \hat{\vec{x}} \, \tilde{\Psi}(\vec{p},t)$$

mit der Impulsraumdarstellung des Ortsoperators

$$\hat{\vec{x}} = i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}} \qquad \left(\vec{\nabla}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial p_x \\ \partial/\partial p_y \\ \partial/\partial p_z \end{pmatrix} \right)$$

Operator	Ortsraumdarst.	Impulsraumdarst.
$\hat{\vec{x}}$	$\vec{x}$	$i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}}$
$\hat{\vec{p}}$	$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$	$\vec{p}$

Verallgemeinerung:

Jeder Observablen A entspricht ein Operator $\hat{A}$. Dieser besitzt unterschiedliche Darstellungen, insbesondere die Ortsraum- und die Impulsraumdarstellung. (Es gibt noch mehr, s. später.)

z.B. $\hat{A} = f(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}, t) \Rightarrow \hat{A}_{Ort} = f(\vec{x}, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}, t)$

$\hat{A}_{Imp} = f(i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{p}}, \vec{p}, t)$

Erwartungswert = Mittelwert vieler unabhängiger Messungen

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle (t) &= \int d^3x \; \Psi^*(\vec{x},t) \, \hat{A}_{Ort} \, \Psi(\vec{x},t) \\ &= \int d^3p \; \tilde{\Psi}^*(\vec{p},t) \, \hat{A}_{Imp} \, \tilde{\Psi}(\vec{p},t) \end{aligned}}$$

<u>Beispiel:</u> kinetische Energie

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Rightarrow \hat{T}_{\text{Ort}} = \frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2$$

$$\hat{T}_{\text{Imp}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{T} \rangle = \int d^3x\, \psi^*(\vec{x},t) \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\right) \psi(\vec{x},t)$$

$$= \int d^3p\, \tilde{\psi}^*(\vec{p},t) \frac{\vec{p}^2}{2m} \tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

<u>Schwankungen um den Mittelwert:</u>

- $\langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \rangle = \int d^3x\, \psi^* \hat{A}_{\text{Ort}} \psi - \int d^3x\, \psi^* \langle \hat{A} \rangle \psi$

  ↑ hängt nicht von $\vec{x}$ ab

  $= \langle \hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \underbrace{\int d^3x\, \psi^* \psi}_{=1}$

  $= 0$

- $\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 - 2\langle \hat{A} \rangle \hat{A} + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle$

  $= \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{A} \rangle^2$

  $= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A(t) := \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}}$$

ist ein Maß für die Unschärfe der Observablen:

- $\Delta A = 0 \Rightarrow$ Jede Messung ergibt den Wert $\langle \hat{A} \rangle$
- ΔA klein $\Rightarrow$ kleine Schwankungen um $\langle \hat{A} \rangle$
- " groß $\Rightarrow$ große "