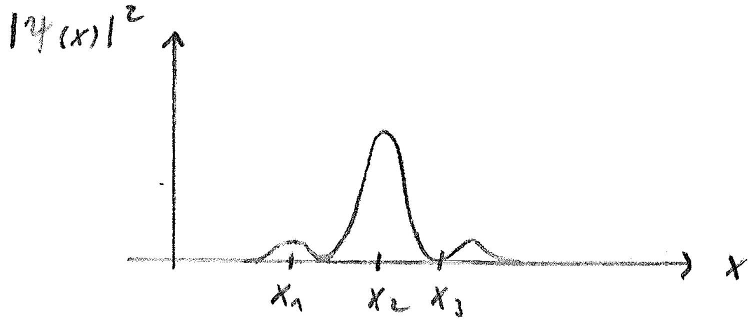
1.8 Interpretation der Wellenfunktion

typische Wahrscheinlichkeitsdichte (zeitunabh. oder zu einer best. Zeit t)



2) Vorhersage:

- relativ hohe Wahrsch., das Teilchen am Ort x_2 zu messen
- geringere Wahrsch., das Teilchen am Ort x_1 zu messen
- verschwindende oder sehr geringe Wahrsch., das Teilchen am Ort x_3 zu messen

Annahme:

Eine Messung liefert den Aufenthaltsort $x_1 \pm \delta x$
(δx = Messgenauigkeit)

Frage:

Wo war das Teilchen unmittelbar vor der Messung?

mögliche Antworten:

1) <u>Realistische Position</u> (Einstein)

- Das Teilchen war auch vorher am Ort $x_1 \pm \delta x$.
- Die Wellenfunktion ψ sagt nichts über die Natur, sondern nur etwas über unser lückenhaftes Wissen.

→ Die QM ist unvollständig, da sie nicht alle Größen zu allen Zeiten exakt beschreibt.

→ Wir brauchen eine Ergänzung zur QM („versteckte Variable")

2) Orthodoxe Position: „Kopenhagener Deutung der QM" (Bohr, Jordan, ...)
Vor der Messung war das Teilchen nirgendwo. Erst der Akt der Messung gibt dem Teilchen die Eigenschaft, sich am Ort $x_1 \pm \delta x$ aufzuhalten.

3) Agnostische Position (Pauli)
Da die Frage prinzipiell nicht beantwortet werden kann (Um den Aufenthaltsort des Teilchens vor der Messung in Erfahrung zu bringen, muss man ihn messen. Aber dann war es nicht mehr vor der Messung ...), sollte man sie gar nicht erst stellen.

Bell'sche Ungleichungen (1964):
Man kann experimentell entscheiden, ob 1) oder 2) richtig ist ($\Rightarrow$ 3) stimmt nicht). Die entsprechenden Experimente bestätigen im Wesentlichen die orthodoxe Position (s. Griffiths, Kap. 12).

2. (Etwas formalere) Grundlagen der Quantenmechanik

2.1 Stationäre Lösungen

SG: $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)}_{=\hat{H}} \psi$$

Annahme: zeitunabhängiges Potenzial, $V = V(\vec{x}, \cancel{t})$

$\Rightarrow$ $\hat{H}$ zeitunabhängig

Separationsansatz: $\psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x})\, \chi(t)$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\, \varphi \frac{d\chi}{dt} = \chi (\hat{H}\varphi) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\varphi\chi}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{i\hbar \frac{1}{\chi}\frac{d\chi}{dt}}_{\text{hängt nicht von } \vec{x} \text{ ab}} = \underbrace{\frac{1}{\varphi}\hat{H}\varphi}_{\text{hängt nicht von } t \text{ ab}}$$

$\Rightarrow$ Beide Seiten sind konstant $=: E$

linke Seite: $$i\hbar \frac{1}{\chi}\frac{d\chi}{dt} = E$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{i\hbar \frac{d}{dt}}_{\text{Energieoperator } \hat{E}} \chi = E\chi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$$

(vgl. S. 13)

↳ Kreisfrequenz $\omega = \frac{E}{\hbar}$

$\Rightarrow$ Die Separationskonstante E ist die Energie des Teilchens!

rechte Seite: $\frac{1}{\varphi} \hat{H} \varphi = E$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\hat{H} \varphi(\vec{x}) = E \varphi(\vec{x})}$$ „zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung"

Die Lösungen φ hängen vom jeweiligen Potenzial V ab. Beispiele dazu werden wir noch kennen lernen.

Insgesamt erhalten wir dann

$$\boxed{\psi(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x})\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$$ „stationäre Lösung"

Eigenschaften:

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|\psi(\vec{x},t)|^2 = |\varphi(\vec{x})|^2 \qquad \text{zeitunabhängig!}$$

↳ Normierung: $\int d^3x\, |\varphi(\vec{x})|^2 = 1$

- Erwartungswerte zeitunabhängiger Operatoren:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \hat{A}(\vec{x})\, \psi(\vec{x},t)$$
$$= \int d^3x\, \varphi^*(\vec{x})\, \hat{A}(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}) \qquad \text{ebenfalls zeitunabhängig!}$$

- Erwartungswert von $\hat{H}$:

$$\langle \hat{H} \rangle = \int d^3x\, \varphi^* \underbrace{\hat{H} \varphi}_{= E\varphi} = E \int d^3x\, \varphi^* \varphi = E$$

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \int d^3x \; \varphi^* \hat{H}^2 \varphi \;=\; E^2 \int d^3x \; \varphi^* \varphi = E^2$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta H)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0$$

↳ Die stationäre Lösung hat eine wohldefinierte (= schwankungsfreie) Energie!

Weitere Eigenschaften stationärer Lösungen wollen wir im Folgenden anhand eines konkreten Beispiels diskutieren.

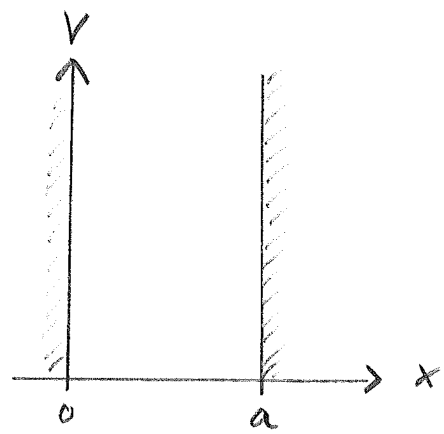
2.2 Der eindimensionale unendlich hohe Potenzialtopf

zeitunabh. SG in einer Dimension:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

unendl. hoher Potenzialtopf:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi^*(x) \, V(x) \, \varphi(x)$$

$\Rightarrow$ Außerhalb des Topfes muss φ verschwinden, da sonst $\langle V \rangle = \infty \rightsquigarrow E = \infty$.

$\Rightarrow \quad \varphi(x) = 0 \qquad$ für $\quad x < 0 \quad$ oder $\quad x > a.$

Innerhalb des Topfes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -k^2\varphi \qquad \text{mit} \quad k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad (E>0)$$

Schwingungsgleichung!

Lösungen: $\quad e^{\pm ikx}$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} = C\sin(kx) + D\cos(kx)$$

Anschlussbedingung:

Stetigkeit der Lösungen bei $x=0$ und $x=a$

$$\Rightarrow \quad \varphi(0) \overset{!}{=} 0 \overset{!}{=} \varphi(a)$$

- $\varphi(0) = C\sin(0) + D\cos(0) = D \overset{!}{=} 0$

  $\Rightarrow \quad D = 0$

- $\Rightarrow \quad \varphi(a) = C\sin(ka) \overset{!}{=} 0$

  $\Rightarrow \quad ka = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\sin(-ka) = -\sin(ka) \quad \Rightarrow \quad n < 0$ kann weggelassen werden.

$\sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = 0 \quad$ nicht normierbar

$$\Rightarrow \quad \varphi_n(x) = C\sin(k_n x) \quad , \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$