$\Rightarrow$ Die möglichen Energien nehmen diskrete Werte an!

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}\,, \quad n = 1,2,3,\dots}$$

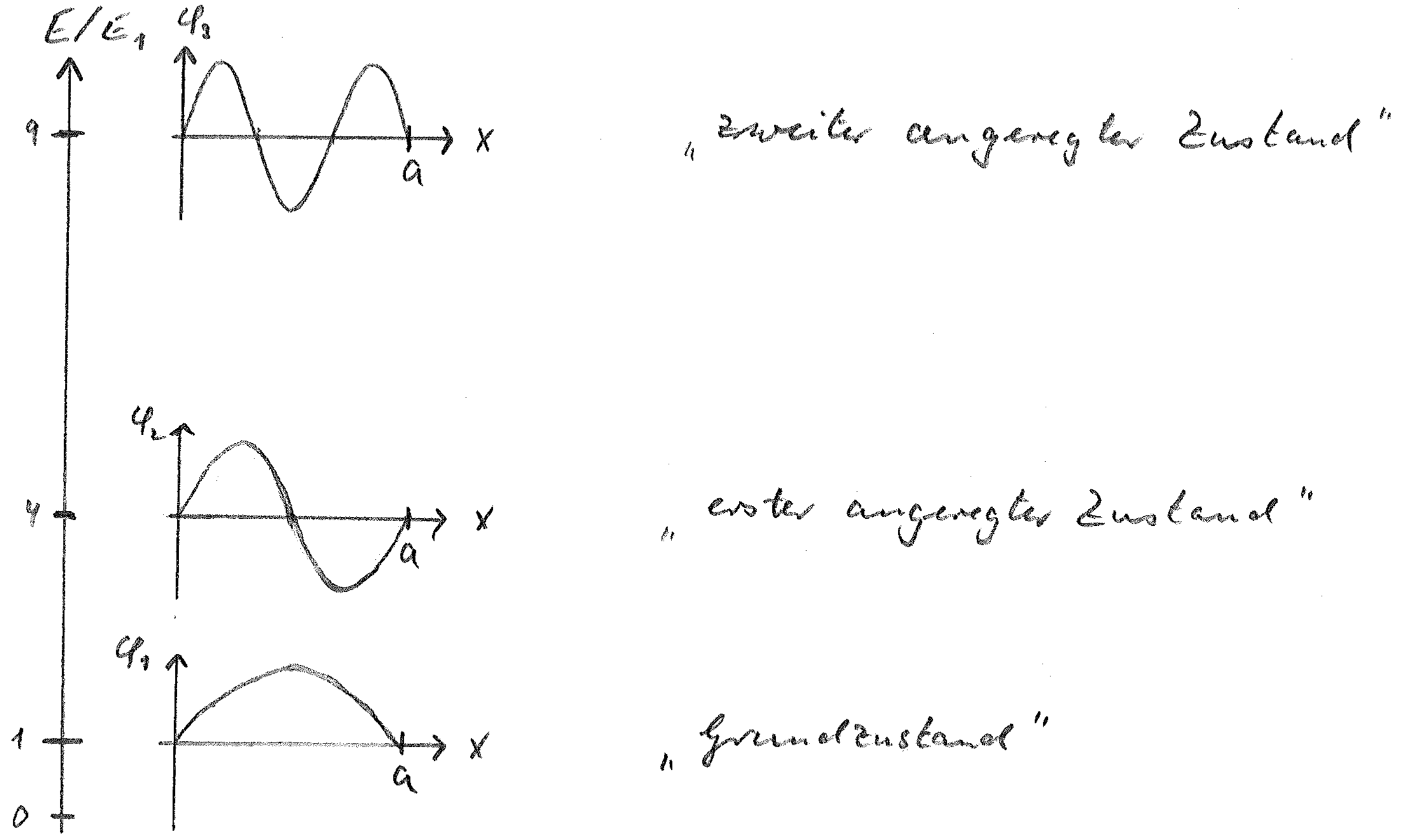
(„Quantelung der Energie")

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\varphi_n(x)|^2 = |C|^2 \int_0^a dx\, \sin^2(k_n x) = |C|^2 \frac{a}{2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\tfrac{2}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$



Eigenschaften:

i) $\psi_n(x,t) = \varphi_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

$\Rightarrow$ Die stationären Lösungen sind stehende Wellen mit Knoten bei $x=0$ und $x=a$ und weiteren $n-1$ Knoten im Innenraum.

ii) $V(x)$ ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an $x=\frac{a}{2}$.
$\Rightarrow$ $\rho(x) = |\varphi(x)|^2$ sollte ebenfalls symmetrisch sein.
$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ symmetrisch oder antisymmetr. bzgl. $x=\frac{a}{2}$
Wir finden: $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \ldots$ symmetrisch
$\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \ldots$ antisymm.

iii) Die φ_n sind orthonormal,

d.h. $$\boxed{\int dx\, \varphi_m^*(x)\, \varphi_n(x) = \delta_{mn}} = \begin{cases} 1 & \text{für } m=n \\ 0 & \text{" } m\neq n \end{cases}$$

Beweis: $m=n$ ✓ (Normierung)
$m \neq n$ $\rightarrow$ Übung

iv) $\{\varphi_n\}$ ist vollständig,
d.h. alle (stückweise stetigen) Funktionen $f(x)$ mit $f(x)=0$ für $x\leq 0$ oder $x \geq a$ können durch $\{\varphi_n\}$ dargestellt werden:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_n(x) \quad \text{mit} \quad c_n = \int dx\, \varphi_n^*(x)\, f(x)}$$

($\rightarrow$ Übung)

2.3 Nicht-stationäre Wellenfunktionen

Die Eigenschaften iii) und iv) gelten allgemein für zeitunabhängige Potenziale (→ später).
Auf Grund der Vollständigkeit können wir beliebige – also auch nicht-stationäre – Wellenfunktionen in der Basis $\{\varphi_n\}$ entwickeln.

Sei $\Psi(\vec{x},0)$ eine Wellenfunktion zur Zeit $t=0$.

$$\curvearrowright \quad \Psi(\vec{x},0) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{x})$$

mit den stationären Lösungen φ_n,

$$\hat{H}\varphi_n(\vec{x}) = E_n \varphi_n(\vec{x})$$

und

$$c_n = \int d^3x \, \varphi_n^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x},0)$$

Zeitentwicklung:

$$\Psi(\vec{x},t) = \sum_n c_n \Psi_n(\vec{x},t) = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

Beweis:

$$\hat{H}\Psi(\vec{x},t) = \sum_n c_n \hat{H}\varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$= \sum_n c_n E_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n c_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x},t) \quad \checkmark$$

Normierung:

$$\int d^3x\ \Psi^*(\vec{x},t)\,\Psi(\vec{x},t)$$

$$= \int d^3x \left(\sum_m c_m^*\,\varphi_m^*(\vec{x})\,e^{\frac{i}{\hbar}E_m t}\right)\left(\sum_n c_n\,\varphi_n(\vec{x})\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\right)$$

$$= \sum_{m,n} c_m^*\,c_n\,e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t}\ \underbrace{\int d^3x\ \varphi_m^*(\vec{x})\,\varphi_n(\vec{x})}_{\delta_{mn}}$$

$$= \sum_n |c_n|^2$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\sum_n |c_n|^2 \overset{!}{=} 1}$$

(Hier sehen wir wieder, dass die Norm zeitlich konstant bleibt, vgl. S. 14/15.)

Energie-Erwartungswert:*

$$\langle \hat{H}\rangle = \int d^3x\ \Psi^*(\vec{x},t)\,\hat{H}\,\Psi(\vec{x},t)$$

$$= \sum_{m,n} c_m^*\,c_n\,e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t}\ \underbrace{\int d^3x\ \varphi_m^*(x)\,\underbrace{\hat{H}\,\varphi_n(\vec{x})}_{E_n\varphi_n(\vec{x})}}_{E_n\delta_{mn}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\langle \hat{H}\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n}$$

analog:

$$\langle \hat{H}^2\rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n^2$$

* Anmerkung:

$$\langle \hat{E}\rangle = \int d^3x\ \Psi^*(\vec{x},t)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t)$$

$$\overset{SG}{=} \int d^3x\ \Psi^*(\vec{x},t)\,\hat{H}\,\Psi(\vec{x},t)$$

$$= \langle \hat{H}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta H)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 \overset{\text{Übung}}{=} \sum_n |c_n|^2 \left(E_n - \langle \hat{H} \rangle \right)^2 \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0$$

$\Rightarrow$ Anders als die stationären Lösungen besitzen die nicht-stationären Lösungen i.A. keine wohldefinierte Energie. Ähnlich wie die in Abschnitt 1.5 diskutierten Wellenpakete Überlagerungen von Lösungen mit verschiedenem Impuls waren, sind die nicht-stationären Wellen, Überlagerungen von Lösungen mit unterschiedlichen Energien:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum c_n \Psi_n(\vec{x}, t)$$

↑ Lösung mit Energie E_n

$\Rightarrow$ $|c_n|^2$ = Wahrscheinlichkeit, die Welle im Zustand Ψ_n anzutreffen

$\leftrightarrow$ Wahrscheinlichkeit die Energie E_n zu messen (Aber verschiedene Ψ_n können die gleiche Energie E_n besitzen.)

$$\Rightarrow \quad \langle \hat{H} \rangle = \sum_n |c_n|^2 \, E_n$$

↑ mittlere Energie

↑ Wahrsch., die Welle im Zustand Ψ_n anzutreffen

↖ Energie des Zustands Ψ_n

- $\langle \hat{H} \rangle$ und ΔH sind zeitunabhängig.

Das gilt aber nicht für alle Erwartungswerte nicht-stationären Lösungen.