Was bedeutet das genau?

Beispiel:

- zwei Observable A und B mit $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, gemeinsamen Eigenzuständen $\{|\varphi_n\rangle\}$,

$$\hat{A}\,|\varphi_n\rangle = a_n\,|\varphi_n\rangle \quad , \quad \hat{B}\,|\varphi_n\rangle = b_n\,|\varphi_n\rangle$$

Wir nehmen an, die $|\varphi_n\rangle$ seien stationäre Zustände (d.h. zeitunabhängig) und die Spektren seien nicht entartet.

- Wir messen zuerst A und finden den Wert a_n.
  $\Rightarrow$ Das System ist nach der Messung im Zustand $|\varphi_n\rangle$
- Wir messen nun B. Da das System im Zustand $|\varphi_n\rangle$ ist, finden wir den Wert b_n, und das System bleibt im Zustand $|\varphi_n\rangle$.
- Wenn wir nun erneut A messen, finden wir mit Sicherheit den Wert a_n (im Rahmen der Messgenauigkeit).

- Sei nun $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$
  Eigenzustände:

$$\hat{A}\,|\varphi_n\rangle = a_n\,|\varphi_n\rangle \quad , \quad \hat{B}\,|\psi_n\rangle = b_n\,|\psi_n\rangle$$

Dabei sind $\{|\varphi_n\rangle\}$ und $\{|\psi_n\rangle\}$ zwei unterschiedliche, aber jeweils vollständige Basis-Systeme.

Insbesondere: $\quad |\psi_n\rangle = \sum_m c_{nm}\,|\varphi_m\rangle$

- Messe A und finde Wert a_n
  $\Rightarrow$ System ist im Zustand $|\varphi_n\rangle$

- Messe anschließend B und finde b_n
  $\Rightarrow$ System ist im Zustand $|\psi_n\rangle$.

- Da $|\psi_n\rangle = \sum_m c_{nm} |\varphi_m\rangle$ ist,
  finden wir bei der anschließenden erneuten Messung von A mit Wahrscheinlichkeit $|c_{nm}|^2$ den Wert a_m, also nicht mehr mit Sicherheit den zuvor gemessenen Wert a_n.

$\rightarrow$ Wenn $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, stören sich die Messungen gegenseitig. Man sagt, A und B sind <u>inkompatibel</u>.

<u>Definitionen:</u>

- Die Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$ bilden einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen, wenn es genau ein gemeinsames System von Eigenzuständen gibt.

- Ein reiner Zustand wird durch Messung eines vollständigen Satzes kommutierender Observabler präpariert.

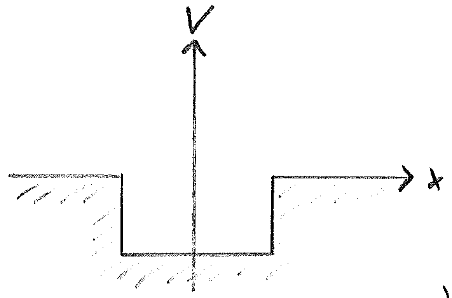
- Die Eigenwerte $a, b, c, \ldots$, die den reinen Zustand charakterisieren nennt man <u>Quantenzahlen</u>.

3. Analytisch lösbare Probleme in einer Dimension

(3.0 eindim. unendl. hoher Potenzialtopf

→ Abschnitt 2.2 ✓

- endlich tiefer Potenzialtopf:
  - nicht ganz analyt. lösbar

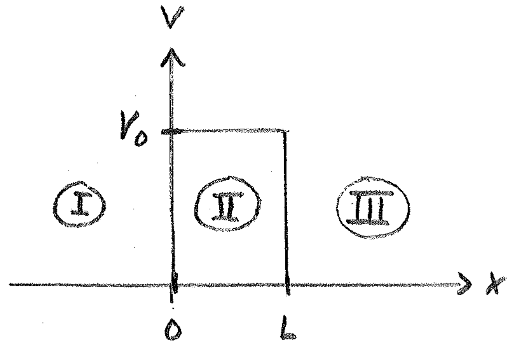


)

3.1 Der Tunneleffekt

endlicher Potenzialwall:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wir betrachten ein Teilchen mit Energie $E < V_0$, das von links kommend auf den Potenzialwall trifft. Was passiert?

klassisch: Die Energie reicht nicht aus, das Potenzial zu überwinden
⇒ Das Teilchen wird reflektiert.

quantenmechanisch: Löse SG

- einzelnes Teilchen:
  zeitabh. SG für Wellenpaket

- einfacher:
  zeitunabh. SG für stationären Teilchenstrom

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

<u>Gebiet I</u> : $V(x) = 0$ (freies Teilchen!)

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x)$$

$$= -k^2\varphi(x) \qquad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\varphi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \quad , \quad x < 0$$

<u>Gebiet III</u> : $V(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{III}(x) = A_{III}\, e^{ikx} + B_{III}\, e^{-ikx} \quad , \quad x > L$$

<u>Gebiet II</u> : $V(x) = V_0 > E$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\varphi(x)$$

$$= \varkappa^2\varphi(x) \qquad \text{mit} \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{II}(x) = A_{II}\, e^{-\varkappa x} + B_{II}\, e^{\varkappa x} \quad , \quad 0 \le x \le L$$

$\rightarrow$ <u>Zwischenergebnis</u>:

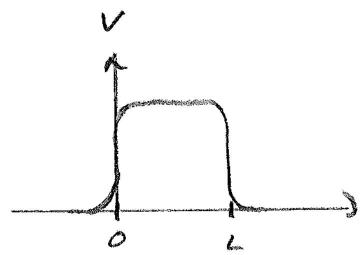
$$\varphi(x) = \begin{cases} A_I\, e^{ikx} + B_I e^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0 \\ A_{II}\, e^{-\varkappa x} + B_{II}\, e^{\varkappa x} & \text{"} \quad 0 \le x \le L \\ A_{III}\, e^{ikx} + B_{III}\, e^{-ikx} & \text{"} \quad x > L \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad , \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

Wodurch sind die Koeffizienten $A_{I,II,III}$ und $B_{I,II,III}$ gegeben.

1. Anschlussbedingungen

$\varphi(x)$ und die Ableitung $\varphi'(x)$ müssen überall (also auch an den Potenzialwänden $x=0$ und $x=L$) stetig sein.



(Begründung:
Betrachte einen stetig „abgerundeten" Potenzialwall

SG $\Rightarrow$ $\varphi''(x) = -\frac{2m(E-V(x))}{\hbar^2}\varphi(x)$

Damit die zweite Ableitung überall existiert, müssen φ und φ' überall stetig sein.
„Unser" unstetiges Potenzial kann als Grenzfall solcher stetigen Potenziale konstruiert werden. In diesem Limes muss φ'' schließlich „springen", wenn V „springt", aber φ und φ' bleiben stetig.)

$$\Rightarrow \quad \varphi_I(0) = A_I + B_I \overset{!}{=} A_{II} + B_{II} = \varphi_{II}(0)$$

$$\varphi_I'(0) = ik(A_I - B_I) \overset{!}{=} -\kappa(A_{II} - B_{II}) = \varphi_{II}'(0)$$

$$\varphi_{II}(L) = \quad \dots \quad = \varphi_{III}(L)$$

$$\varphi_{II}'(L) = \quad \dots \quad = \varphi_{III}'(L)$$

$\leadsto$ 4 von 6 Koeffizienten können eliminiert werden.

2. Zeitabhängigkeit

volle zeitabh. Wellenfkt (vgl. Abschnitt 2.1):

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\,\chi(t) = \varphi(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \equiv \varphi(x)\,e^{-i\omega t}$$

$\rightsquigarrow$ $\varphi(x) = e^{ikx}$: nach „rechts" laufende ebene Welle

$\varphi(x) = e^{-ikx}$: " „links" " " "

$\varphi(x) = e^{-\varkappa x}$: nach rechts gedämpfte Oscillation

$\varphi(x) = e^{\varkappa x}$: " " anwachsende "

} keine laufenden Wellen

klassische Erwartung:

- einlaufendes Teilchen im Gebiet I $\rightsquigarrow$ $A_I \neq 0$
- reflektiertes " " " $\rightsquigarrow$ $B_I \neq 0$
- keine Teilchen in Gebiet II und III $\rightsquigarrow$ $A_{II,III} = B_{II,III} = 0$

QM: gilt nicht wegen Anschlussbedingungen!

Eine von „links" kommende Welle muss teilweise in den klassisch verbotenen Bereich II eindringen und läuft i.A. hinter der Potenzialbarriere weiter nach rechts („Tunneleffekt").
Dagegen gibt es keinen Grund, dass die Welle im Bereich III wieder nach links zurück läuft.

$\Rightarrow$ $B_{III} = 0$