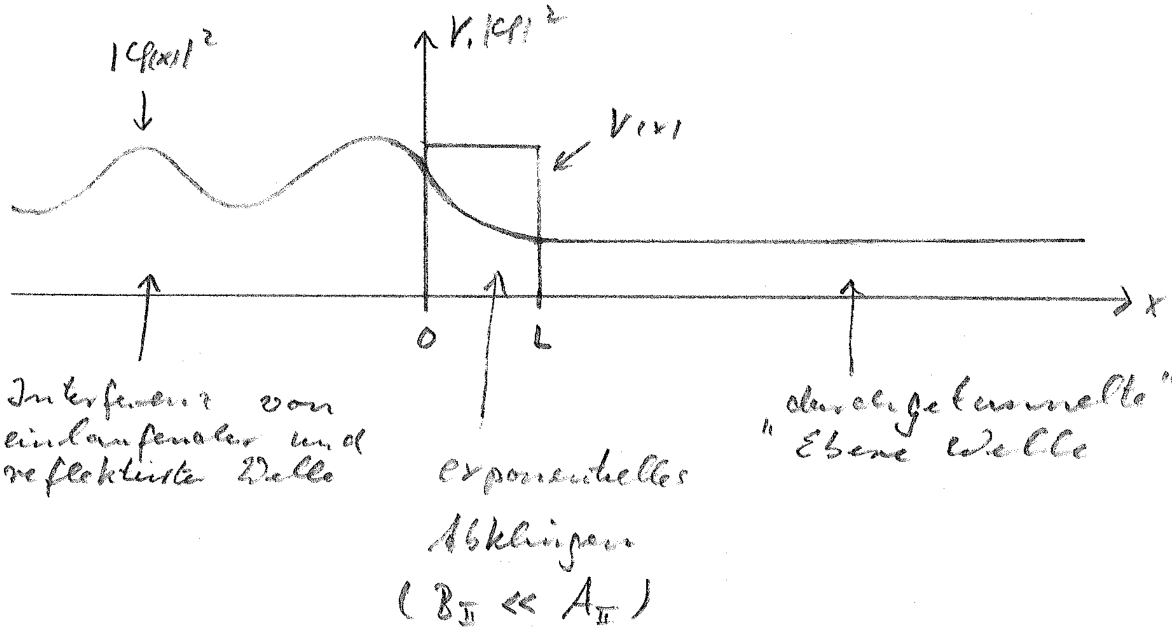
Wir finden also:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_I\, e^{ikx} + B_I\, e^{-ikx} & \text{für } x \le 0 \\ A_{II}\, e^{-\varkappa x} + B_{II}\, e^{\varkappa x} & \text{" } 0 \le x \le L \\ A_{III}\, e^{ikx} & \text{" } x \ge L \end{cases}$$

Dabei ist A_I eine Normierungskonstante, die mit dem auf die Potenzialbarriere zulaufenden Teilchenstrom zusammenhängt.
Die Koeffizienten B_I, A_{II}, B_{II} und A_{III} können über die Anschlussbedingungen berechnet werden.
(Sie sind proportional zu A_I und Funktionen von E, V_0 und L.)

Insgesamt ergibt sich folgendes Ergebnis für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(x) = |\varphi(x)|^2$:



<u>Reflexionskoeffizient</u>*: $R = \left|\frac{B_I}{A_I}\right|^2$

<u>Transmissionskoeffizient</u>*: $T = \left|\frac{A_{III}}{A_I}\right|^2$

$T = 1 - R$

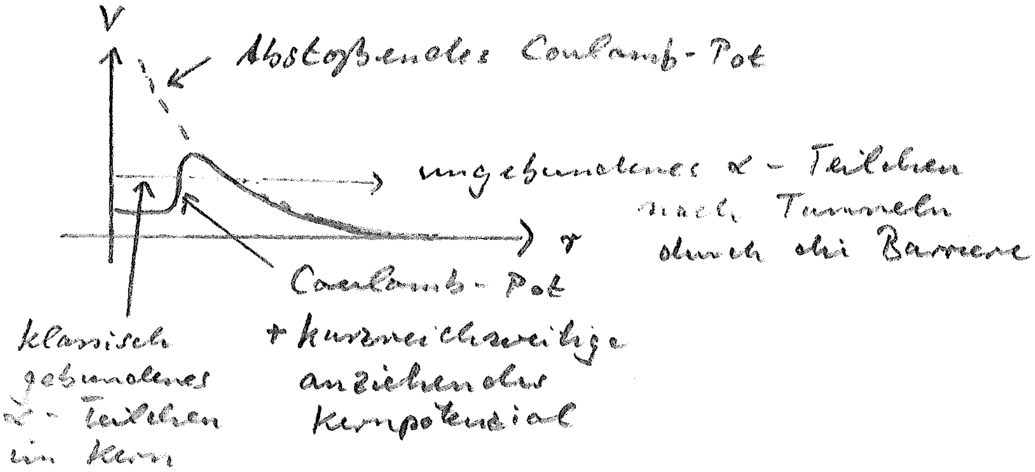
(Folge der Wahrscheinlichkeitserhaltung)

* Eigentlich sind R und T über die Wahrscheinlichkeitsströme definiert (→ Übung)

Falls $\varkappa L = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\, L \gg 1 \;\leadsto\; T \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\, e^{-2\varkappa L}$

(Tunnelwahrsch. exp. unterdrückt)

<u>Beispiel für Tunneleffekt:</u> α-Zerfall von Atomkernen



<u>3.2 Der harmonische Oszillator</u>

<u>klassisch:</u> $V(x) = \frac{1}{2} D x^2$, D = Federkonstante

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{dV}{dx} = -Dx$$

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -Dx$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$$

$$= C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$$

<u>quantenmechanisch:</u>

löse zeitunabh. SG

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right)\varphi(x) = E\,\varphi(x)}$$

oder darstellungsunabhängig:

$$\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

Es ist möglich, die SG direkt im Ortsraum zu lösen. Hier wollen wir aber eine elegantere Methode beschreiben, deren Bedeutung weit über das konkrete Problem hinausgeht.

Definiere:
$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \qquad \text{(dimensionslos)}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^+ := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \qquad \text{"}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}\hat{a}^+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right)\left(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega}\Big(m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - i m\omega \underbrace{(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})}_{[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar}\Big)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}$$

analog: $\quad \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^+ - \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

und $\quad \boxed{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1}$

Sei nun $|n\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{a}^+\hat{a}$ mit

$$\hat{a}^+\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \quad , \quad n \in R .$$

Dann folgt:

- $$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\,(\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2})\,|n\rangle = (n+\tfrac{1}{2})\,\hbar\omega\,|n\rangle ,$$

d.h. $|n\rangle$ ist auch ein Eigenzustand von $\hat{H}$ mit Energie $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$!

- Die $|n\rangle$ seien normiert: $\langle n|n\rangle = 1$

$$\Rightarrow \quad n = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}\,|n\rangle \equiv \langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$$

mit $|\alpha\rangle := \hat{a}\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle n|\,\hat{a}^+ = \langle\alpha|$

- $$\hat{a}^+\hat{a}\,(\hat{a}^+|n\rangle) = \hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a} + \underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{=1})\,|n\rangle$$

$$= \hat{a}^+\,(n+1)\,|n\rangle$$

$$= (n+1)\,(\hat{a}^+|n\rangle)$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}^+|n\rangle$ ist ein Eigenzustand von $\hat{a}^+\hat{a}$ mit Eigenwert $n+1$:

$$\hat{a}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle \qquad \text{(nicht notw. normiert)}$$

- Analog:

$$\hat{a}^+\hat{a}\,(\hat{a}\,|n\rangle) = (n-1)\,(\hat{a}\,|n\rangle)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}\,|n\rangle \sim |n-1\rangle$$

→ Ausgehend von einem Eigenzustand $|n\rangle$ mit $\hat{a}^+\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ kann man durch Anwenden des Operators $\hat{a}^+$ sukzessive Eigenzustände mit immer höheren Eigenwerten $(n+1)$, $(n+2)$, ... konstruieren.
Analog kann man mit Hilfe von $\hat{a}$ Eigenzustände mit Eigenwerten $(n-1)$, $(n-2)$, ... konstruieren.
Man nennt daher

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{a}^+ : & \text{„Aufsteigeoperator"} \\ \hat{a} : & \text{„Absteigeoperator"} \end{array}\right\} \text{„Leiteroperatoren"}$$

• Problem:
Mit $\hat{a}$ kann man scheinbar Eigenzustände mit beliebig kleinem n (also auch $n<0$) konstruieren. Aber wir haben gesehen, dass $n \geq 0$ gilt!

Ausweg:
Angenommen, es gibt einen Zustand $|n_0\rangle$ mit

$$\hat{a}\,|n_0\rangle = 0$$

Dann ist $\hat{a}^+\hat{a}\,\underbrace{(\hat{a}\,|n_0\rangle)}_{=0} = (n_0-1)\,\underbrace{(\hat{a}\,|n_0\rangle)}_{=0}$

trivial erfüllt, aber $\hat{a}\,|n_0\rangle$ ist kein normierbarer Eigenzustand von $\hat{a}^+\hat{a}$.
→ Die Iteration bricht ab.

Wenn $|n_0\rangle$ selbst noch ein normierter Eigenzustand sein soll, d. h. $\langle n_0|n_0\rangle = 1$, muss offensichtlich gelten:

$$n_0|n_0\rangle = \hat{a}^+ \underbrace{\hat{a}|n_0\rangle}_{=0} = 0\cdot|n_0\rangle \quad \Rightarrow \quad n_0 = 0 \quad !$$

$\Rightarrow$ Es gibt einen <u>niedrigsten Zustand</u> (= Grundzustand) $|0\rangle$ mit

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle 0|0\rangle = 1$$

Alle anderen Zustände (= angeregte Zustände) kann man mit Hilfe von $\hat{a}^+$ aus $|0\rangle$ konstruieren:

$$|1\rangle \sim \hat{a}^+|0\rangle \quad , \quad |2\rangle \sim (\hat{a}^+)^2|0\rangle \quad , \ldots$$

Unter Berücksichtigung der Normierung findet man (→ Übung)

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle \quad , \quad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

Wie in Abschnitt 2.5 allgemein gezeigt, bilden diese Zustände eine ONB des Hilbert-Raums: $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$.

• $\hat{H}|n\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \quad , \quad n = 0,1,2,3}$$