5.2 Spin

Neben dem „Bahndrehimpuls" $\hat{L}$ besitzen Elementarteilchen auch einen „intrinsischen Drehimpuls", den so genannten Spin. Naiv kann man sich darunter die Eigenrotation um eine Achse vorstellen. Dies ist jedoch irreführend, da insbesondere auch punktförmige Teilchen wie Elektronen, Quarks und Photonen einen Spin besitzen. Viel mehr ist der Spin – ähnlich wie die Masse oder die Ladung – eine charakteristische innere Eigenschaft eines jeden Elementarteilchens, dessen Natur sich erst im Rahmen einer relativistischen Behandlung erschließt.

Allgemein wird der Spin durch einen Operator $\hat{\vec{S}}$ beschrieben, der die gleichen Kommutatoreigenschaften besitzt wie $\hat{\vec{L}}$:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z \quad \text{und zykl. Vert.}$$

$$[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_k] = 0 \quad , \; k \in \{x, y, z\}$$

↳ Es gibt Eigenzustände $|s, m_s\rangle$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\vec{S}}^2 |s, m_s\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |s, m_s\rangle \\ \hat{S}_z |s, m_s\rangle &= m_s\hbar |s, m_s\rangle \\ \text{mit } s = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots \; &\text{und } m_s = -s, -s+1, \ldots, s-1, s \end{aligned}}$$

Anders als $\hat{\vec{L}}$ ist $\hat{\vec{S}}$ ein abstrakter Operator, der nicht mit der Wellenfunktion im Ortsraum zusammenhängt. Beim Spin sind daher auch halbzahlige Werte möglich.

<u>Beispiele:</u>

• Elektron, Quark	$s = \frac{1}{2}$	im Standard-Modell elementar
• Photon, Gluon	$s = 1$	
• „Higgs-Teilchen" (?)	$s = 0$	
• Proton, Neutron	$s = \frac{1}{2}$	zusammengesetzt
• Pion	$s = 0$	
• Δ-Resonanz	$s = \frac{3}{2}$	
• ρ-Meson	$s = 1$	
• Atomkerne	$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$	

5.2.1 Spin $s = \frac{1}{2}$

Dies ist einer der wichtigsten Fälle, da Elektronen, Protonen und Neutronen Spin $\frac{1}{2}$ haben. Gleichzeitig ist es der einfachste nicht-triviale Fall.

$$s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Eigenzustände von $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$

$$|s, m_s\rangle = |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \equiv |\uparrow\rangle \qquad \text{„Spin-up"}$$

$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \equiv |\downarrow\rangle \qquad \text{„Spin-down"}$$

$\leadsto$ Es bietet sich an, den Spin-$\frac{1}{2}$-Hilbert-Raum durch zweikomponentige Vektoren zu beschreiben:

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Wie sehen dann die Spin-Operatoren aus?

Es gilt:

$$\left.\begin{aligned}\hat{S}_z \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \hat{S}_z \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Auf- und Absteige-Operatoren $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\,\hat{S}_y$

$$\left.\begin{aligned}\hat{S}_+ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \vec{0}\\ \hat{S}_+ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \alpha \in \mathbb{C}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{S}_+ = \alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{S}_- = \hat{S}_+^\dagger = \alpha^*\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha^* & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\alpha\\ i\alpha^* & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{1}{4}\left(|\alpha|^2 + |\alpha|^2 + \hbar^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{S}}^2 |s=\tfrac{1}{2}, m_s=\pm\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{4}\left(2|\alpha|^2 + \hbar^2\right)|s=\tfrac{1}{2}, m_s=\pm\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{s(s+1)}_{=3/4}\hbar^2\, |s=\tfrac{1}{2}, m_s=\pm\tfrac{1}{2}\rangle$$

2) Wähle $\alpha = \hbar$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

und $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dies schreibt man oft in der Form

$$\boxed{\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k \quad \text{mit} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: „Pauli'sche Spin-Matrizen"

(oder „Pauli-Matrizen)

Ein allgemeiner Spin-$\frac{1}{2}$-Zustand kann wieder als Linearkombination der Basis-Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ geschrieben werden:

$$|\chi\rangle = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix}$$

Insbesondere können wir z.B. die Eigenzustände von $\hat{S}_x$ bestimmen.
Diagonalisieren liefert:

$$\hat{S}_x\,|\uparrow_x\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow_x\rangle, \qquad \hat{S}_x\,|\downarrow_x\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow_x\rangle$$

mit
$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Wir messen den Spin eines Elektrons entlang der x-Achse und finden den Wert $+\frac{1}{2}\hbar$.
Anschließend messen wir entlang der z-Achse.
Welchen Wert finden wir jetzt?

Antwort:
Nach der Messung von $+\frac{1}{2}\hbar$ in x-Richtung befindet sich das Elektron im Zustand

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit, entlang der z-Achse den Wert $+\frac{1}{2}\hbar$ zu messen, entspricht dem statistischen Gewicht (vgl. Abschnitt 2.5)

$$|c_\uparrow|^2 = |\langle\uparrow|\uparrow_x\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

und analog für die Wahrscheinlichkeit, $-\frac{1}{2}\hbar$ zu messen

$$|c_\downarrow|^2 = |\langle\downarrow|\uparrow_x\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Wir messen also mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $+\frac{1}{2}\hbar$ und $-\frac{1}{2}\hbar$.

Angenommen, wir messen $+\frac{1}{2}\hbar$.
Wenn wir nun wieder entlang der x-Achse messen, mit welcher Wahrscheinlichkeit messen wir erneut $+\frac{1}{2}\hbar$?