

Antwort:

Das Elektron befindet sich nun im Zustand

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow_x\rangle$$

⇒ Die Wahrscheinlichkeit beträgt wieder $|\langle \uparrow_x | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2}$, d. h. durch die Messung in z-Richtung haben wir die Eigenschaft des Elektrons zerstört, eine wohldefinierte x-Komponente des Spins zu haben.

Der Spin z. B. eines Elektrons ist mit einem magnetischen Moment verbunden und kann darüber grundsätzlich gemessen werden (d. h. seine Projektion entlang einer beliebig vorgegebenen Richtung).

Daneben besitzt das Elektron natürlich weiterhin die zuvor besprochenen Observablen wie z. B. Ort oder Impuls. Diese sind vom Spin (in der nicht-relativist. Theorie) völlig unabhängig.

→ Das Elektron wird durch eine Produktwellenfunktion beschrieben:

$$\Psi_{\text{ges.}}(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}, t) \cdot \chi(t)$$

$\Psi(\vec{x}, t)$ = Ortswellenfunktion (wie bisher)

$$\chi(t) = c_{\uparrow}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{\downarrow}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein reiner Zustand des Wasserstoff-Atoms wird als durch die Quantenzahlen n, l, m und m_s charakterisiert (+ Kernspin und Schwerpunktbewegung).

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{S}_z] &= [\hat{L}^2, \hat{S}_z] = [\hat{L}_z, \hat{S}_z] \\ &= [\hat{H}, \hat{S}^2] = [\hat{L}^2, \hat{S}^2] = [\hat{L}_z, \hat{S}^2] = 0 \end{aligned}$$

(und nach wie vor $[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$)

Solange \hat{H} (wie bisher) keine Spin-Operatoren enthält, sind die verschiedenen Spin-Zustände entartet, d. h. die Energie hängt nicht von m_s ab. Diese Entartung kann z. B. durch Anlegen eines externen Magnetfelds aufgehoben werden, das einen Potentialterm der Form

$$V \sim \vec{B} \cdot \hat{S} = \frac{\hbar}{2} (B_x \sigma_x + B_y \sigma_y + B_z \sigma_z)$$

hervorruft.

Ebenso kann z. B. das durch die Bahnbewegung des Elektrons hervorgerufene magnetische Moment an den Spin des Elektrons koppeln. Dies bewirkt einen kleinen Korrekturterm zum Coulomb-Potential („Spin-Bahn-Kopplung“)

$$V_{LS} \sim \hat{L} \cdot \hat{S},$$

das bisherige Entartung der Energie-Niveaus im Wasserstoff-Atom teilweise aufhebt („Feinstruktur“).

5.3 Addition von Drehimpulsen am Beispiel des Spins

Betrachte zwei unterschiedliche Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, z. B. das Elektron und das Proton im Grundzustand des Wasserstoffatoms ($\Rightarrow l=0$).

Wie groß ist der Gesamtdrehimpuls (hier: = Gesamtspin) des Systems?

Die Spins der beiden Teilchen können unabhängig voneinander gemessen werden, d. h. wir haben zwei Operatoren $\hat{S}^{(e)}$ und $\hat{S}^{(p)}$ mit

$$[\hat{S}_i^{(e)}, \hat{S}_j^{(p)}] = 0$$

und den jeweiligen Eigenzuständen

$$\hat{S}^{(e)2} |\frac{1}{2}, m_e\rangle_e = \frac{3}{4} \hbar^2 |\frac{1}{2}, m_e\rangle_e, \quad \hat{S}_z^{(e)} |\frac{1}{2}, m_e\rangle_e = m_e \hbar |\frac{1}{2}, m_e\rangle_e$$

$$\hat{S}^{(p)2} |\frac{1}{2}, m_p\rangle_p = \frac{3}{4} \hbar^2 |\frac{1}{2}, m_p\rangle_p, \quad \hat{S}_z^{(p)} |\frac{1}{2}, m_p\rangle_p = m_p \hbar |\frac{1}{2}, m_p\rangle_p$$

mit $m_e, m_p = \pm \frac{1}{2}$.

Eine Basis für die Spin-Zustände des Gesamtsystems ist dann einfach durch die Produktzustände

$$|m_e, m_p\rangle := |\frac{1}{2}, m_e\rangle_e \otimes |\frac{1}{2}, m_p\rangle_p$$

gegeben. Dies ist so zu verstehen, dass $\hat{S}^{(e)}$ nur auf den ersten Teil wirkt und $\hat{S}^{(p)}$ nur auf den zweiten, z. B.

$$\hat{S}_z^{(e)} |m_e, m_p\rangle = m_e \hbar |m_e, m_p\rangle$$

Wir haben also vier Basis-Zustände:

$$|\uparrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle$$

(in der üblichen Notation, z.B. $|\uparrow, \downarrow\rangle \equiv |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$).

Wir definieren nun den Gesamt-Spin-Operator

$$\hat{S} = \hat{S}^{(e)} + \hat{S}^{(p)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= [\hat{S}_x^{(e)}, \hat{S}_y^{(e)}] + \underbrace{[\hat{S}_x^{(e)}, \hat{S}_y^{(p)}]}_{=0} + \underbrace{[\hat{S}_x^{(p)}, \hat{S}_y^{(e)}]}_{=0} \\ &\quad + [\hat{S}_x^{(p)}, \hat{S}_y^{(p)}] \\ &= i\hbar \hat{S}_z^{(e)} + i\hbar \hat{S}_z^{(p)} \\ &= i\hbar \hat{S}_z \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

=> Die Komponenten von \hat{S} erfüllen die gleichen Kommutatorregeln wie $\hat{S}^{(e)}$, $\hat{S}^{(p)}$ oder \hat{L} .

$$\Rightarrow [\hat{S}_z, \hat{S}^2] = 0$$

=> Es gibt gemeinsame Eigenzustände von \hat{S}_z und \hat{S}^2 .

Wir sehen diese aus?

Wir untersuchen zunächst die oben definierten Produktzustände:

$$\begin{aligned} \hat{S}_z |m_e, m_p\rangle &= \hat{S}_z^{(e)} |m_e, m_p\rangle + \hat{S}_z^{(p)} |m_e, m_p\rangle \\ &= m_e \hbar |m_e, m_p\rangle + m_p \hbar |m_e, m_p\rangle \\ &= (m_e + m_p) \hbar |m_e, m_p\rangle \end{aligned}$$

Die Produktzustände sind also Eigenzustände von \hat{S}_z , $\hat{S}_z |m_e, m_p\rangle = m_s \hbar |m_e, m_p\rangle$

mit $m_s = m_e + m_p$,

- also :
- $|\uparrow, \uparrow\rangle : m_s = +1$
 - $|\uparrow, \downarrow\rangle : m_s = 0$
 - $|\downarrow, \uparrow\rangle : m_s = 0$
 - $|\downarrow, \downarrow\rangle : m_s = -1$

Die Existenz von $m_s = \pm 1$ -Zuständen legt nahe, dass es sich um Spin-1-Zustände handelt. Aber das kann nicht für alle Zustände gelten, da es nur drei Spin-1-Zustände geben kann ($m_s = -1, 0, 1$).

-> Verwende Leiter-Operatoren:

$$\hat{S}_+ |\uparrow, \uparrow\rangle = \hat{S}_+^{(e)} |\uparrow, \uparrow\rangle + \hat{S}_+^{(p)} |\uparrow, \uparrow\rangle = 0 + 0 = 0$$

=> $|\uparrow, \uparrow\rangle$ ist der Zustand mit dem höchst-möglichen m des Multipletts. Da $m_s = +1$ ist, muss auch $s = 1$ sein, d.h. $|\uparrow, \uparrow\rangle \equiv |s=1, m_s=1\rangle$.

Die anderen Zustände der $s=1$ -Multiplikts erhält man nun mit Hilfe von \hat{S}_- :

$$|s=1, m_s=0\rangle \sim \hat{S}_- |1, 1\rangle = \hat{S}_-^{(e)} |1, 1\rangle + \hat{S}_-^{(p)} |1, 1\rangle \\ \sim |1, 1\rangle + |1, 0\rangle$$

$$\Rightarrow |s=1, m_s=-1\rangle \sim \hat{S}_- (|1, 1\rangle + |1, 0\rangle) \\ = \hat{S}_-^{(e)} |1, 1\rangle + \hat{S}_-^{(p)} |1, 1\rangle + \hat{S}_-^{(e)} |1, 0\rangle + \hat{S}_-^{(p)} |1, 0\rangle \\ \sim 0 + |1, 0\rangle + |1, 0\rangle + 0 \\ \sim |1, 0\rangle$$

normierte Spin-1-Zustände:

$$|s=1, m_s=1\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|s=1, m_s=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |1, 1\rangle)$$

„Triplet“

$$|s=1, m_s=-1\rangle = |1, 0\rangle$$

Da es ursprünglich zwei $m_s=0$ -Zustände gab, gibt es noch einen weiteren Basis-Zustand, der zu $|s=1, m_s=0\rangle$ orthogonal ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |1, 1\rangle)$$

Es gilt:

$$\hat{S}_+ (|1, 0\rangle - |1, 1\rangle) \sim 0 + |1, 1\rangle - |1, 1\rangle - 0 = 0$$

$$\hat{S}_- (|1, 0\rangle - |1, 1\rangle) \sim |1, 0\rangle + 0 - 0 - |1, 0\rangle = 0$$

\Rightarrow Es handelt sich um einen Spin-0-Zustand:

$$|s=0, m_s=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \quad \text{„Singulett“}$$

Man kann nachrechnen, dass diese Zustände tatsächlich Eigenzustände von \hat{S}^2 sind:

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) \hbar^2 |s, m_s\rangle = \begin{cases} 0 \hbar^2 |0, 0\rangle \\ 2 \hbar^2 |1, m_s\rangle \end{cases}$$

(\rightarrow Übung)

Allgemein gilt für die Addition zweier Spins s_1 und s_2 , dass der Gesamtspin s die Werte

$$s = (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 - 1), \dots, |s_1 - s_2|$$

annehmen kann.

Analog kann man den Bahndrehimpuls l eines Teilchens mit seinem Spin s zum Gesamtdrehimpuls j koppeln mit

$$j = (l + s), (l + s - 1), \dots, |l - s|$$

(z.B. $l=1, s=\frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$)

Schließlich kann man auch die Gesamtdrehimpulse zweier Teilchen zu einem „Gesamt-Gesamtdrehimpuls“ koppeln:

$$j_{\text{total}} = (j_1 + j_2), (j_1 + j_2 - 1), \dots, |j_1 - j_2|$$