II Statistische Physik

6. Identische Teilchen in der Quantenmechanik

6.1 Zwei-Teilchen-Systeme

Wellenfunktion für zwei Teilchen (ohne Spin):

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \quad , \quad \vec{x}_i = \text{Ort des } i\text{-ten Teilchens}$$

$\leadsto$ $|\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2$ = Wahrscheinlichkeitsdichte, zur Zeit t Teilchen 1 am Ort $\vec{x}_1$ und Teilchen 2 am Ort $\vec{x}_2$ zu finden

$\leadsto$ Normierung: $\int d^3x_1\, d^3x_2\, |\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2 = 1$

zeitabhängige SG: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$

mit $$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1}_{\substack{\text{kin. Energie} \\ \text{Teilchen 1}}} \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2}_{\substack{\text{kin. Energie} \\ \text{Teilchen 2}}} + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$$

zeitunabhängiges Potenzial $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

$\rightarrow$ stationäre Lösung $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

mit

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V\right)\varphi = E\varphi$$

<u>Zwei identische Teilchen:</u>

(z.B. zwei Elektronen in einem Kasten)

$$\Rightarrow \quad m_1 = m_2 \quad , \quad V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

Wenn wir das System zu einem Zeitpunkt $t=0$ präparieren und dann den Aufenthaltsort der beiden Teilchen zu einem späteren Zeitpunkt messen, können wir in der QM <u>grundsätzlich</u> nicht wissen, welches von beiden Teilchen 1 und welches Teilchen 2 ist:
Die Teilchen sind prinzipiell <u>ununterscheidbar</u>.

$\Rightarrow$ gleiche Aufenthaltswahrscheinlichkeit:

$$|\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|^2 = |\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)|^2$$

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie kann man zeigen, dass es hier zwei Möglichkeiten gibt, die vom Spin der Teilchen abhängen:

a) $\quad \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = + \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)$

für Teilchen mit Spin $0, 1, 2, \ldots$ („<u>Bosonen</u>")

b) $\quad \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = - \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)$

für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ („<u>Fermionen</u>")

Da wir in unserer bisherigen Diskussion nur Teilchen ohne Spin betrachtet haben, können wir bislang also streng genommen nur Bosonen beschreiben. Das Gesagte bleibt jedoch auch für Teilchen mit Spin (insbesondere also Fermionen) korrekt, wenn sich beide Teilchen im gleichen Spin-Zustand befinden (also z.B. zwei Elektronen mit Spin $|\uparrow\rangle$).

<u>Beispiel:</u> $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U(\vec{x}_1) + U(\vec{x}_2)$
(d.h. zwei Teilchen im externen Potenzial U, ohne Wechselwirkung untereinander)

$$\Rightarrow \quad \hat{H}\, \varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = E\, \varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

mit $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, $\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + U(\vec{x}_i)$

Ein-Teilchen-Lösungen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{x})\right)\varphi_a(\vec{x}) = E_a\, \varphi_a(\vec{x})$$

$\Rightarrow$ Lösungen der Zwei-Teilchen-SG:

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_1)\, \varphi_b(\vec{x}_2) \quad , \quad E = E_a + E_b$$

nur korrekt für unterscheidbare Teilchen!

(z.B. ein Proton und ein Neutron im Potenzial U)

<u>ununterscheidbare Bosonen:</u> symmetrisiere!

$$\varphi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) + \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\right)$$

<u>ununterscheidbare Fermionen:</u> anti-symmetrisiere!

$$\varphi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)\right)$$

$\Rightarrow$ Zwei identische Fermionen können nicht im gleichen Zustand sein:

$$\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_a(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_a(\vec{x}_1) = 0$$

(<u>„Pauli-Prinzip"</u>)

Bsp.: Zwei Elektronen im Coulomb-Potenzial eines Kerns können nicht das gleiche Orbital (n, l, m) besetzen, wenn sie den gleichen Spin haben.

<u>„Austausch-Kräfte"</u>

Betrachte zwei Teilchen in einer Dimension und berechne den Erwartungswert des quadratischen Abstands:

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \langle \varphi | (\hat{x}_1-\hat{x}_2)^2 | \varphi\rangle$$

$$= \int dx_1 \int dx_2 \; \varphi^*(x_1,x_2)\,(x_1-x_2)^2\,\varphi(x_1,x_2)$$