7.4 Physikalische Bedeutung von α und β

Die Parameter α und β, die N_n festlegen, werden durch die Nebenbedingungen bestimmt:

$$\sum_n N_n(\alpha,\beta) = N \quad , \quad \sum_n N_n(\alpha,\beta) E_n = E$$

also $\quad (E, N) \leftrightarrow (\alpha, \beta)$

Zur weiteren Interpretation betrachten wir ein <u>ideales Gas</u>, d. h. ein System von sehr vielen nicht wechselwirkenden Teilchen in einem <u>dreidimensionalen unendlich hohen Potenzialtopf</u> mit Volumen $V = l_x l_y l_z$.

Erinnerung:
Energien des eindim Potenzialtopfs mit Breite a:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 \, , \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

=> dreidim. Potenzialtopf:

$$E_{\vec{n}} = E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}_{\vec{n}}^2$$

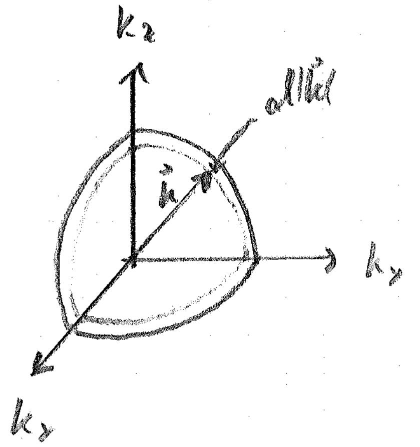
mit $\quad \vec{k}_{\vec{n}} = \left(\frac{n_x \pi}{l_x}, \frac{n_y \pi}{l_y}, \frac{n_z \pi}{l_z} \right)$

$\Rightarrow$ $E_{\vec{n}}$ hängt nur von $|\vec{k}_{\vec{n}}|$ ab

$\Rightarrow$ Zustände mit gleichem $|\vec{k}_{\vec{n}}|$ sind entartet.

• Für große $|\vec{k}_n|$ kann die Summe über die Energie-Niveaus E_n durch ein Integral über $|\vec{k}|$ genähert werden.

→ Betrachte einen schmalen Bereich des $\vec{k}$-Raums zwischen $k \equiv |\vec{k}|$ und $k + dk$



(nur ein Oktant, da $n_x, n_y, n_z \geq 0$
$\Rightarrow k_x, k_y, k_z \geq 0$)

Wieviele Zustände liegen in dieser Schicht?

- k-Raum-Volumen der Schicht:

$$\frac{1}{8} \cdot 4\pi k^2 dk$$

- k-Raum-Volumen <u>eines</u> Zustands:

$$\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z} = \frac{\pi^3}{V} \qquad \left(\text{da } \vec{k}_n = \left(\frac{n_x \pi}{l_x}, \frac{n_y \pi}{l_y}, \frac{n_z \pi}{l_z}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ Entartungsfaktor $\hat{=}$
Zahl der Zustände in der Schicht:

$$dn = \frac{\frac{1}{8} \cdot 4\pi k^2 dk}{\pi^3 / V} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

unterscheidbare Teilchen:

1. Nebenbedingung:

$$N = \sum_n d_n \, e^{-(\alpha+\beta E_n)}$$

$$\approx \int_0^\infty \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \; e^{-(\alpha+\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m})}$$

$$= V e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad (*)$$

$$\left(\Rightarrow \quad \alpha = -\ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}\right)^{3/2}\right] \right)$$

2. Nebenbedingung:

$$E = \sum_n d_n \, e^{-(\alpha+\beta E_n)} E_n$$

$$\approx \int_0^\infty \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \; e^{-(\alpha+\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m})} \cdot \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$= \frac{3V}{2\beta} e^{-\alpha} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \overset{(*)}{=} \frac{3N}{2\beta}$$

Vergleich mit der mittleren kinetischen Energie eines Teilchens in einem klassischen idealen Gas: $\frac{E}{N} = \frac{3}{2} k_B T$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}} \qquad \underline{T = \text{Temperatur}} \; !$$

($k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K „Boltzmann-Konstante“)

Ferner definiert man:

$$\boxed{-\frac{\alpha}{\beta} = -\alpha k_B T =: \mu}$$

„chemisches Potenzial"

Für nicht-wechselwirkende ununterscheidbare Teilchen können wir analog vorgehen, wobei die Integrale dann i. A. nicht mehr explizit ausgeführt werden können.

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} N &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \; n(E_k) \\ E &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \; E_k \, n(E_k) \end{aligned}}$$

(Bemerkung: $\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$)

mit $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

und den Verteilungsfunktionen (vgl. Nu., S. 117)

$$n(E) = \begin{cases} \gamma \, e^{-(E-\mu)/k_B T} & \text{für unterscheidb. Teilchen („Maxwell – Boltzmann")} \\ \gamma \, \dfrac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} & \text{für identische Fermionen („Fermi-Dirac")} \\ \gamma \, \dfrac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} & \text{für identische Bosonen („Bose-Einstein")} \end{cases}$$

γ: zusätzlicher Entartungsgrad auf Grund innerer Freiheitsgrade (z.B. Spin)

- Fermi-Verteilung für $T \to 0$:

$$\lim_{T\to 0} \frac{\gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1} = \gamma\,\Theta(\mu-\varepsilon) = \begin{cases} \gamma & \text{für } \varepsilon < \mu \\ 0 & \text{"} \ \varepsilon > \mu \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Alle Niveaus unterhalb / oberhalb von $\varepsilon = \mu$ sind besetzt / unbesetzt.

$\rightsquigarrow$ $\mu(T=0) =: \varepsilon_F$ „Fermi-Energie".

- Falls $\frac{\varepsilon-\mu}{k_BT} \gg 1$, dann gilt

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} \pm 1} \approx e^{-(\varepsilon-\mu)/k_BT},$$

d.h. $n_{Fermi}(\varepsilon) \approx n_{Bose}(\varepsilon) \approx n_{untersch.}(\varepsilon)$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

- „schwarzer Körper":
  absorbiert alles auf seine Oberfläche treffende Licht, unabhängig von der Frequenz (keine Reflexion)

- schwarzer Körper im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung:
  Die absorbierte Energie muss wieder abgestrahlt werden.
  $\rightsquigarrow$ Wie sieht das Spektrum als Funktion der Temperatur aus?

- „Strahlung" $\hat{=}$ Photonen $\hat{=}$ masselose Bosonen ($s=1$)
  $\Rightarrow$ relativistisch

Wir können demnach unseren für nicht-relativistische Teilchen entwickelten Formalismus verwenden, wenn wir einige Besonderheiten akzeptieren, die sich nur in einer relativistischen Theorie erklären lassen.

Es ergeben sich folgende Voraussetzungen:

1.) relativist. Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \overset{m=0}{\Longrightarrow} E = pc$$

2.) Wellenbeschreibung (wie im nichtrel. Fall, vgl. Kap. 1)

$$\left.\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{array}\right\} \overset{1.)}{\Longrightarrow} k = \frac{\omega}{c}$$

3.) $s = 1$, aber es gibt keine Photonen mit $m = 0$
$\Rightarrow$ nur $m = \pm 1$ ($\hat{=}$ zwei transversalen Polarisationsrichtungen)

4.) N_{Photon} ist nicht konstant:
Photonen können erzeugt und absorbiert werden.

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad (\Leftrightarrow \mu = 0)$$

Dann gilt (vgl. S. 117)

$$N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1},$$

wobei für freie Photonen im Volumen V gilt

$$d_k = \overset{\text{Spin}}{2} \cdot \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

2) Gesamtzahl der Photonen:

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \, \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Gesamtenergie:

$$E = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \, \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} = V \int_0^\infty d\omega \, \tilde{\varrho}(\omega)$$

mit der differentiellen Energiedichte
(= Energie pro Volumen und Frequenzintervall $d\omega$)

$$\boxed{\tilde{\varrho}(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}}$$

„Planck'sches Strahlungsgesetz"

Oft schreibt man auch

$$E = V \int_0^\infty d\nu \, \varrho(\nu) \quad , \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \varrho(\nu) = 2\pi \tilde{\varrho}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \varrho(\nu) = \cancel{2\pi} \, \frac{\frac{h}{2\pi} (2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3 (e^{h\nu/k_B T} - 1)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varrho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 (e^{h\nu/k_B T} - 1)}}$$