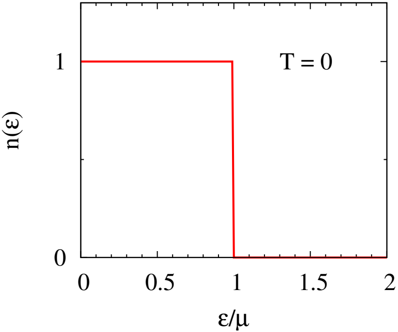
Fermi-Dirac-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$

Fermi-Dirac-Verteilung

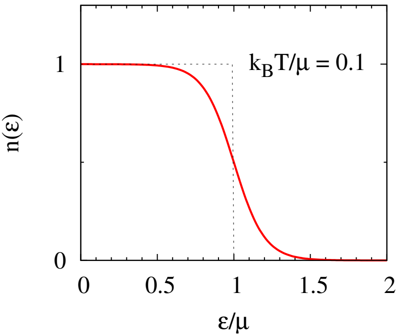
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1}$



Fermi-Dirac-Verteilung

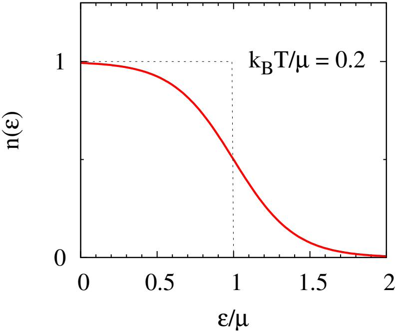
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$



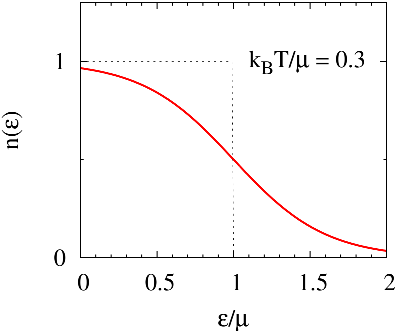
Fermi-Dirac-Verteilung

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1}$



Fermi-Dirac-Verteilung

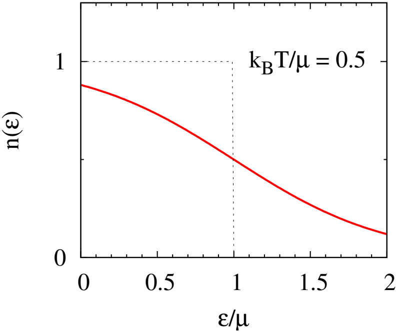
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$



Fermi-Dirac-Verteilung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

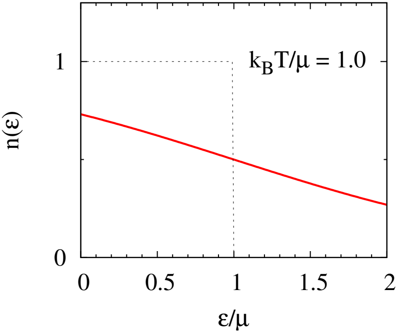
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$



Fermi-Dirac-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

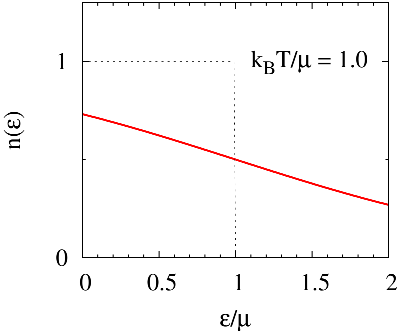
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$



Fermi-Dirac-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$



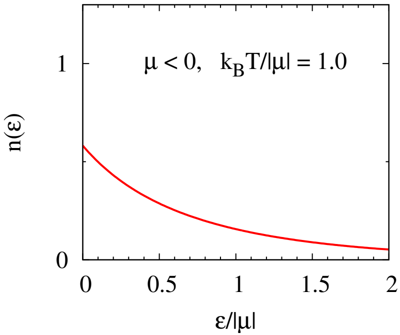
- Achtung: Für $\mu(T) = const.$ ist $N(T) = \frac{V}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty k^2 dk\, n(E_k)$ nicht konstant!

Bose-Einstein-Verteilung

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$

Bose-Einstein-Verteilung

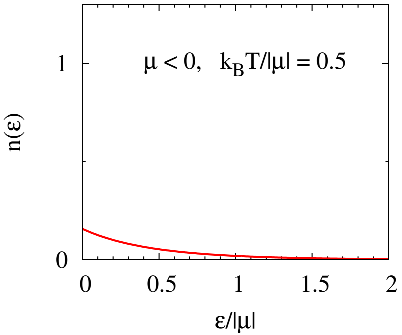
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}-1}$



Bose-Einstein-Verteilung

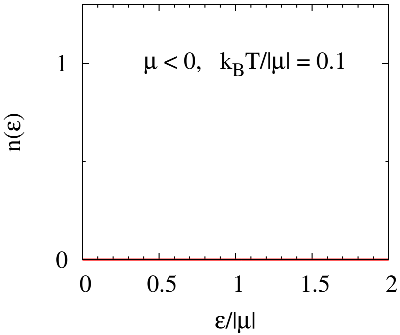
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$



Bose-Einstein-Verteilung

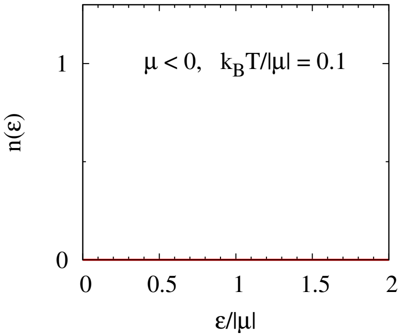
- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$



Bose-Einstein-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Besetzungsfunktion pro innerem Freiheitsgrad: $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}-1}$



- Achtung: Für $\mu(T) = const.$ ist $N(T) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk\, n(E_k)$ nicht konstant!

Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

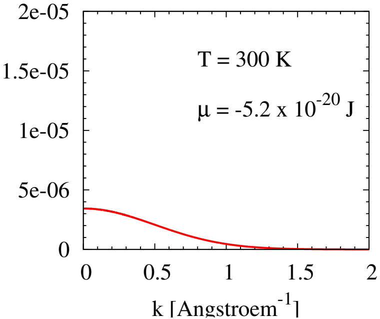
Bose-Einstein-Verteilung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22{,}4\,\ell$
  - $m_{He} = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg

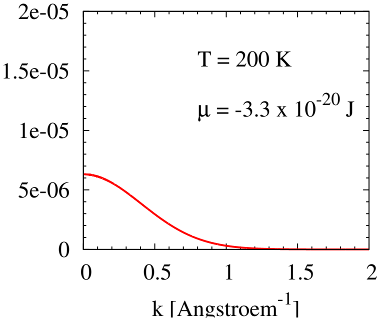


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

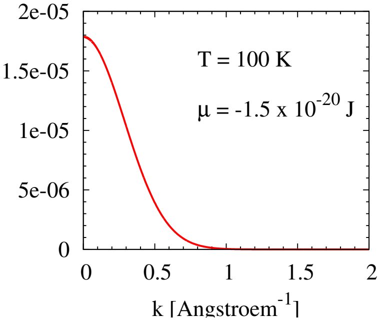


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg



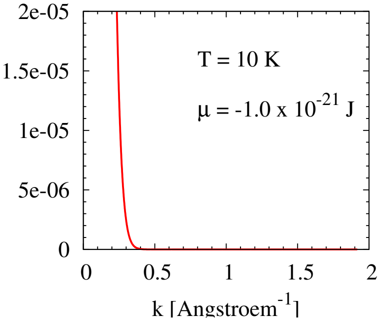
Bose-Einstein-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

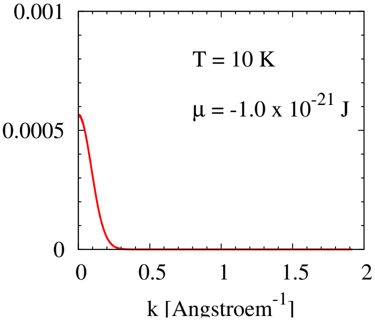


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

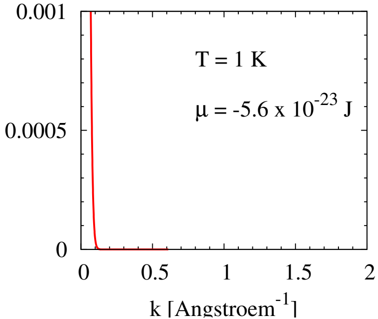


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

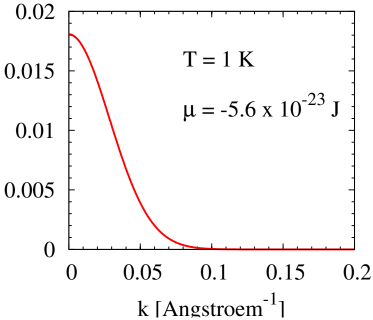


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

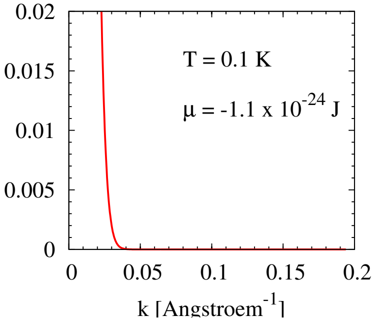


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg



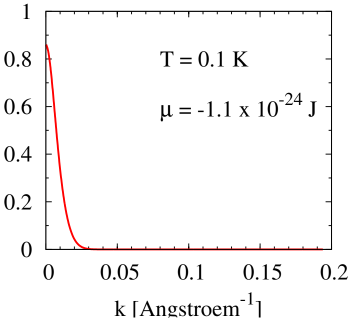
Bose-Einstein-Verteilung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg

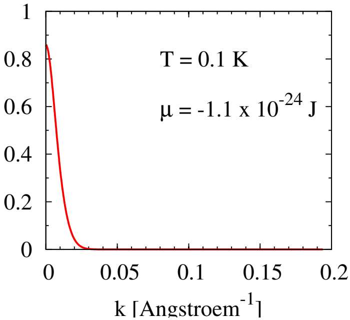


Bose-Einstein-Verteilung

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg



- Unterhalb einer kritischen Temperatur T_c können selbst für $\mu = 0$ nicht mehr alle Teilchen in der „normalen” BE-Verteilung „untergebracht” werden.

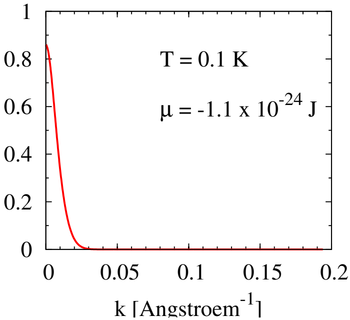
Bose-Einstein-Verteilung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- (nicht ganz) realistisches Beispiel:

  ideales ^{4}He-Gas mit

  - $N = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$
  - $V = V_{mol} = 22,4\,\ell$
  - $m_{He} = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg



- Unterhalb einer kritischen Temperatur T_c können selbst für $\mu = 0$ nicht mehr alle Teilchen in der „normalen" BE-Verteilung „untergebracht" werden.

$\Rightarrow$ Makroskopische Besetzung des Grundzustands durch die überschüssigen Teilchen: Bose-Einstein-Kondensation

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „schwarzer Körper":

  absorbiert alles auf seine Oberfläche treffende Licht, unabhängig von der Frequenz (keine Reflexion)

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „schwarzer Körper":

  absorbiert alles auf seine Oberfläche treffende Licht, unabhängig von der Frequenz (keine Reflexion)

- thermisches Gleichgewicht:

  Die absorbierte Energie muss wieder abgestrahlt werden.
  Wie sieht das Spektrum als Funktion der Temperatur aus?

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „schwarzer Körper":

  absorbiert alles auf seine Oberfläche treffende Licht, unabhängig von der Frequenz (keine Reflexion)

- thermisches Gleichgewicht:

  Die absorbierte Energie muss wieder abgestrahlt werden.
  Wie sieht das Spektrum als Funktion der Temperatur aus?

- „Strahlung" = Photonen = masselose Bosonen ($s = 1$) $\Rightarrow$ relativistisch!

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „schwarzer Körper":

  absorbiert alles auf seine Oberfläche treffende Licht, unabhängig von der Frequenz (keine Reflexion)

- thermisches Gleichgewicht:

  Die absorbierte Energie muss wieder abgestrahlt werden.
  Wie sieht das Spektrum als Funktion der Temperatur aus?

- „Strahlung" = Photonen = masselose Bosonen ($s = 1$) $\Rightarrow$ relativistisch!

- Wir können dennoch unseren nicht-relativistischen Formalismus verwenden, wenn wir einige Besonderheiten akzeptieren, die sich nur in einer relativistischen Theorie erklären lassen:

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2 \quad \stackrel{m=0}{\Rightarrow} \quad E = pc$$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 \quad \overset{m=0}{\Rightarrow} \quad E = pc$$

2. Wellenbeschreibung (wie im nicht-relativistischen Fall):

$$\left.\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \overset{1.}{\Rightarrow} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

   $$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 \quad \stackrel{m=0}{\Rightarrow} \quad E = pc$$

2. Wellenbeschreibung (wie im nicht-relativistischen Fall):

   $$\left.\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \stackrel{1.}{\Rightarrow} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

3. Photonen sind transversal polarisiert:

   $s = 1$, aber nur $m = \pm 1$ erlaubt, keine Photonen mit $m = 0$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

   $$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2 \quad \overset{m=0}{\Rightarrow} \quad E = pc$$

2. Wellenbeschreibung (wie im nicht-relativistischen Fall):

   $$\left.\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \overset{1.}{\Rightarrow} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

3. Photonen sind transversal polarisiert:

   $s = 1$, aber nur $m = \pm 1$ erlaubt, keine Photonen mit $m = 0$

4. Photonen können erzeugt oder absorbiert werden.

   $\Rightarrow \quad N_{Photon}$ ist nicht konstant $\quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zahl der Photonen mit Energie $E_k = \hbar\omega$: $N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zahl der Photonen mit Energie $E_k = \hbar\omega$: $N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega / k_B T} - 1}$
- Entartungsfaktor: $d_k = 2\,\frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,dk = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

- Zahl der Photonen mit Energie $E_k = \hbar\omega$: $N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- Entartungsfaktor: $d_k = 2\,\frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,dk = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega$
- Gesamtzahl der Photonen: $N = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int\limits_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

- Zahl der Photonen mit Energie $E_k = \hbar\omega$: $N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- Entartungsfaktor: $d_k = 2\,\frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,dk = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega$
- Gesamtzahl der Photonen: $N = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- Gesamtenergie: $E = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$

7.5 Schwarzkörperstrahlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zahl der Photonen mit Energie $E_k = \hbar\omega$: $N_\omega = \frac{d_k}{e^{\beta E_k} - 1} = \frac{d_k}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- Entartungsfaktor: $d_k = 2\,\frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,dk = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2\,d\omega$
- Gesamtzahl der Photonen: $N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- Gesamtenergie: $E = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\,\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$
- $\omega = 2\pi\nu\,, \quad \hbar\omega = h\nu \quad \Rightarrow \quad E = \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty d\nu\,\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \equiv V \int_0^\infty d\nu\,\rho(\nu)$
- differenzielle Energiedichte (= Energie pro Volumen und Frequenzintervall):

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

Planck'sches Strahlungsgesetz

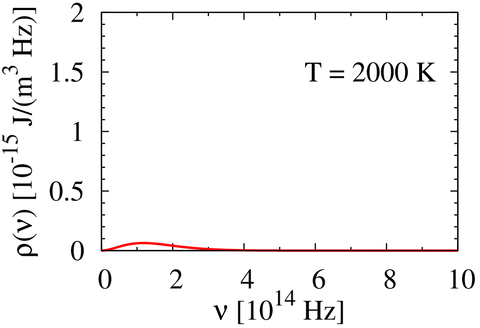
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energiedichte pro Frequenzintervall $d\nu$: $\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

Planck'sches Strahlungsgesetz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

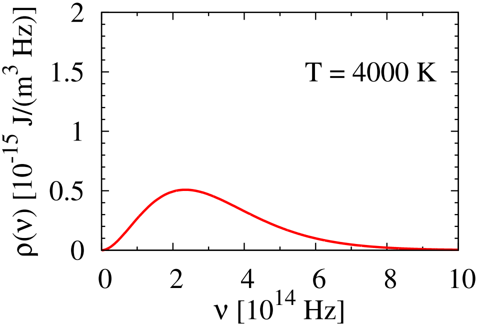
- Energiedichte pro Frequenzintervall $d\nu$: $\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$



- sichtbarer Bereich: (4–8) 10^{14} Hz

Planck'sches Strahlungsgesetz

- Energiedichte pro Frequenzintervall $d\nu$: $\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}$

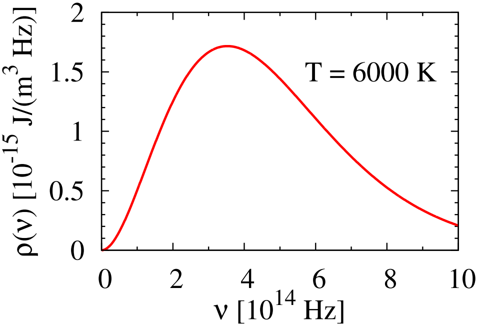


- sichtbarer Bereich: (4–8) 10^{14} Hz

Planck'sches Strahlungsgesetz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energiedichte pro Frequenzintervall $d\nu$: $\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$



- sichtbarer Bereich: (4–8) 10^{14} Hz