Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

10. Übungsblatt

12. Dezember 2006

Aufgabe 28 (schriftlich):

Gegeben sei das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + a^2} \left(-y, x, 0\right)^T$$

Diskutieren Sie die zugehörige magnetische Induktion $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. Zeigen Sie, dass das Vektorpotential

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + a^2} \left(x - y, y + x, 0\right)^T$$

die gleiche magnetische Induktion liefert wie das Vektorpotential $\vec{A}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) - \nabla\chi(\vec{r})$$

und bestimmen Sie die Funktion $\chi(\vec{r})$.

Aufgabe 29 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

In der Vorlesung hatten wir den Potential- und Feldverlauf einer homogen magnetisierten Kugel ($\vec{M} = M_0\vec{e}_z$, Radius R) unter expliziter Lösung der 'Poisson-Gleichung' für das skalare magnetische Potential φ_m bestimmt. Im Folgenden wollen wir dasselbe Resultat nochmals mit Hilfe einer Multipol-Entwicklung berechnen.

a) Im Innenraum gelte $\vec{B}_i = B_0\vec{e}_z$ (lineares Medium). Was ergibt sich dann für $\vec{H}_i$?

b) Welche Randbedingungen für $\vec{B}$ und $\vec{H}$ erwarten Sie an der Kugeloberfläche ?

b) Machen Sie nun einen Multipol-Ansatz für das skalare Potential im Außenraum. Benutzen Sie die Randbedingungen aus (b) um die Koeffizienten der Entwicklung zu bestimmen. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Resultat der Vorlesung.

Bw.

Aufgabe 30 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Ein unendlich dünner Kreisring mit Radius R werde von einem Strom I durchflossen.

a) Zeigen Sie, dass die Stromdichte in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = I/R\,\delta(r-R)\,\delta(\theta-\pi/2)\,\vec{e}_\varphi$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass $B_\varphi = \vec{B}\,\vec{e}_\varphi$ verschwindet.

c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} B_r &= \vec{B}\vec{e}_r = \frac{\mu_0 I R^2 \cos\vartheta}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{[r^2+R^2-2rR\sin\vartheta\cos\varphi']^{3/2}} \\ B_\vartheta &= \vec{B}\vec{e}_\vartheta = \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{r\cos\varphi' - R\sin\vartheta}{[r^2+R^2-2rR\sin\vartheta\cos\varphi']^{3/2}} \end{aligned}$$

d) Berechnen Sie das Fernfeld ($r >> R$) der Stromschleife.