Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

11. Übungsblatt

9. Januar 2007

Aufgabe 31 (schriftlich):

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen $i = 1..3$. Die Koordinaten in diesem System sind dann durch x_i, die Ableitungen durch $\partial_i := \partial/\partial x_i$ gegeben. Ferner soll nach Konvention über doppelt auftretende Indizes summiert werden, z.B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i =: a_i b_i$ (Einstein'sche Summenkonvention). Der vollständige antisymmetrische Tensor (Levi-Cevita-Tensor) ist definiert durch

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 0 & \text{wenn mindestens zwei Indices gleich sind} \\ +1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine gerade Permutation von 1,2,3 ist} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

a) $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

b) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$

c) $\epsilon_{ijk}\, \delta_{ij} = 0$

d) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$

e) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijk} = 6$

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$

g) $\nabla \times (\nabla \times \vec{f})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \triangle \vec{f}$

Hierbei ist $\vec{f}(\vec{r}, t)$ ein beliebiges Vektorfeld.

Aufgabe 32 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}, t)$, das für $r \to \infty$ hinreichend stark abfällt, läßt sich stets als Summe einer longitudinalen Komponente $\vec{F}_L$ und einer transversalen Komponente $\vec{F}_T$ schreiben, d.h. $\vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_T$. Dabei gilt

$$\nabla \times \vec{F}_L = 0 \,, \qquad \nabla \cdot \vec{F}_T = 0 \,.$$

Bw.

Beweisen Sie, dass gilt:

$$\vec{F}_L(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\nabla \int d^3r' \, \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \,,$$
$$\vec{F}_T(\vec{r},t) = +\frac{1}{4\pi}\nabla \times \nabla \times \int d^3r' \, \frac{\vec{F}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\triangle \int d^3r' \, \frac{\vec{F}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \,,$$

und benutzen Sie anschließend die Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \triangle \vec{f} \,,$$

die für beliebige Vektorfelder $\vec{f}(\vec{r},t)$ gilt (siehe Aufgabe 31).

Aufgabe 33 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Im Vakuum unter Abwesenheit von Strömen und Ladungen erfüllen das skalare und das Vektorpotential in Lorentz-Eichung folgende homogene Wellengleichungen:

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = 0 \,, \qquad \Box\vec{A}(\vec{r},t) = 0 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$ dieselbe Art von Differentialgleichung erfüllen.

b) Die Ausdrücke

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und $\vec{k}$? Diskutieren Sie die Richtungen der Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$.

c) Wie groß ist die Energiestromdichte (Energiefluss) parallel bzw. senkrecht zu $\vec{k}$?