Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

3. Übungsblatt

31. Oktober 2006

Aufgabe 7 (schriftlich):

Berechnen Sie die Bahnkurve $|\vec{r}| = r = r(\varphi)$ für die Bewegung eines Massenteilchens in einem drei-dimensionalen isotropen harmonischen Oszillatorpotential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$, und diskutieren Sie die Bahnkurve.

a) Geben Sie die Umkehrpunkte der Bahnkurve an.

b) Welches ist bei vorgegebener Gesamtenergie der maximale Bahndrehimpuls ? Auf welcher Kurve bewegt sich dann das Teilchen ?

c) Bestimmen Sie die Abhängigkeit $r(\varphi)$. Berechnen Sie hierzu das Integral

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}}$$

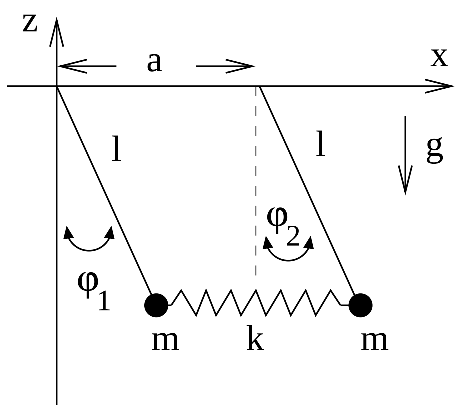
indem Sie für $\dot{r}$ den Energiesatz substituieren.
Hinweis: Führen Sie die Variable $u = 1/r^2$ ein und verwenden Sie

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

für den Fall $a < 0$ und $\Delta = (4ac - b^2) < 0$.
Bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten erhalten Sie dann $r(\varphi)$ in der Form $r^2(\varphi) = A/(1 + B\cos 2\varphi)$, wobei A und B von der Energie und dem Drehimpuls abhängen.

Aufgabe 8 (in der Übungsgruppe):

Betrachten Sie ein System aus zwei identischen Pendeln (Masse m, Länge l) im homogenen Gravitationsfeld, die durch eine masselose Feder (Federkonstante k) gekoppelt sind. Nehmen Sie an, dass die Pendel nur in der x-z-Ebene schwingen können. Die Ruhelänge a der Feder sei gleich dem Abstand der Aufhängepunkte der Feder (siehe Skizze).



a) Wählen Sie φ_1 und φ_2 als generalisierte Koordinaten und geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

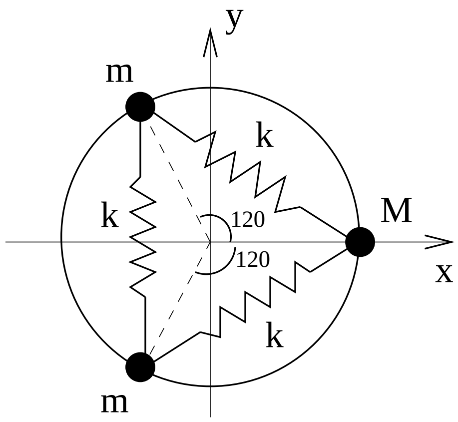
b) Berechnen Sie die potentielle Energie V bis zu Termen 2. Ordnung in φ_1 und φ_2.

c) Stellen Sie mit Hilfe des Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die allgemeine Lösung an.

d) Bestimmen Sie die Normalkoordinaten Q_1, Q_2 als Funktion der Winkel φ_1, φ_2 und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 9 (in der Übungsgruppe):

Gegeben sei ein ebenes System aus drei Massenpunkten mit Massen $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = M$, welche sich auf einem Kreis mit Radius R reibungsfrei bewegen können. Die Massen seien durch drei identische masselose Federn (Federkonstante k) miteinander verbunden. Wenn die Massenpunkte auf der Kreislinie symmetrisch angeordnet sind, sollen die Federn entspannt sein. Im Folgenden wollen wir die Schwingungszustände für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage berechnen.



a) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten für die Auslenkung der Massen aus ihrer Ruhelage, und betsimmen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems. Vernachlässigen Sie dabei alle kubischen und höheren Terme in den Auslenkungen bzw. Geschwindigkeiteen.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenzen ω des Systems gegeben sind durch

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{3k/4m}, \quad \omega_3 = \sqrt{k(M+2m)/(4Mm)}\,.$$

Bestimmen Sie die dazugehörigen Eigenvektoren und interpretieren Sie das Ergebnis.