Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

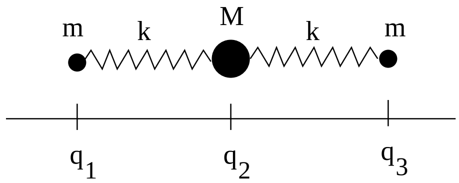
Theorie klassischer Teilchen und Felder II

4. Übungsblatt

31. Oktober 2006

Aufgabe 10 (schriftlich):

Betrachten Sie kleine Schwingungen eines dreiatomigen Moleküls längs der Molekülachse. Die beiden äußeren Atome seinen gleich und haben die Masse m. Das innere Atom habe die Masse M. Die Federkonstante sei jeweils k.



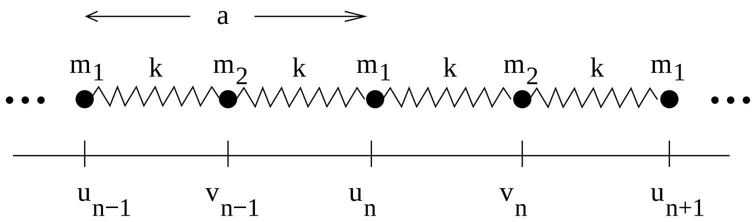
Die Lagrangefunktion des Systems lautet

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}_1^2 + M\dot{q}_2^2 + m\dot{q}_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(k(q_2 - q_1)^2 + k(q_3 - q_2)^2\right).$$

Bestimmen Sie die in der Vorlesung definierten Matrizen M_{ij} und K_{ij} und berechnen Sie die Eigenfrequenzen und normierten Basisvektoren (Eigenfunktionen). Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 11 (in der Übungsgruppe):

Zweiatomige lineare Kette: Verallgemeinern Sie die Lösung der in der Vorlesung besprochenen linearen Kette auf den Fall zweier unterschiedlichen Atomsorten (Massen m_1, m_2, Gitterabstand a in den Untergittern, Periodizität N), die alternierend angeordnet sind:



a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Geben Sie hierzu der einen Atomsorte die Koordinaten u_n und der anderen die Koordinaten v_n. Sie erhalten dann zwei gekoppelte Sätze von Bewegungsgleichungen. Schreiben Sie diese unter Verwendung der Ansätze

$$u_n = ue^{i(n\nu_1 a - \omega t)}, \quad v_n = ve^{i(n\nu_1 a - \omega t)} \qquad \text{mit} \quad \nu_1 = 2\pi/(aN)$$

in eine Matrixgleichung für den Vektor $(u, v)^T$ um.

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Bewegungsgleichung aus (a).

c) Diskutieren Sie die Grenzfälle $\nu_1 a \ll 1$ und $nv_1 = \pm\pi/a$. Bw.

Aufgabe 12 (in der Übungsgruppe):

Welche kanonische Transformation von den 'alten' kanonischen Variablen (p, q) zu den 'neuen' Variablen (P, Q) wird durch die erzeugende Funktion

$$F(Q, p) = -(e^Q - 1)^2 \tan(p)$$

generiert ? Geben Sie die neuen Variablen als Funktion der alten Variablen an. Von welchem Typ ist die erzeugende Funktion ?