Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

5. Übungsblatt

7. November 2006

Aufgabe 13 (schriftlich):

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte

a) $g(u)$ der Funktion $f(x) = \alpha x^2$,

b) $g(x, v)$ der Funktion $f(x, y) = \alpha x^2 y^3$.

Aufgabe 14 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m sei in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) formuliert:

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}; \quad V_0 = \text{const.}, \ \rho_0 = \text{const.}$$

a) Wie lautet die Hamilton-Funktion ?

b) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf.

c) Finden Sie drei Erhaltungssätze.

Aufgabe 15 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Ein mechanisches System habe die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right).$$

a) Lösen Sie die Hamilton'schen Gleichungen. Bw.

b) Zeigen Sie, dass die Transformation auf die Koordinaten (P_i, Q_i) eine kanonische Transformation ist, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= q_1^2 + p_1^2 \\
Q_2 &= \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2\right) \\
P_1 &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q_1}{p_1}\right) \\
P_2 &= -\arctan\left(\frac{q_2}{p_2}\right)
\end{aligned}$$

Hinweis: Bringen Sie die Transformation auf die Gestalt $q_k = q_k(p_i, P_i)$ und $Q_k = Q_k(p_i, P_i)$ und bestimmen Sie eine erzeugende Funktion $U(p_i, P_i)$, so dass

$$q_k = -\frac{\partial U}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}.$$

c) Wie lautet die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten (P_i, Q_i) ? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten auf und lösen Sie diese. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil (a).