Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

6. Übungsblatt

14. November 2006

Aufgabe 16 (schriftlich):

Die Hamiltonfunktion $H(p, q, t)$ sowie die Funktion $F(p, q, t)$ seien Erhaltungsgrößen.

a) Zeigen Sie, dass $\partial F/\partial t$ dann auch eine Erhaltungsgröße ist.
(Hinweis: Für eine Erhaltungsgröße gilt $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$, wobei $\{,\}$ die Poisson-Klammern darstellen.)

b) Für die gleichförmige Bewegung eines freien Teilchens in einer Dimension ist $H = p^2/2m$. Die Funktion $F(p, x, t) = x - (p/m)t$ ist in diesem Fall eine Erhaltungsgröße. Zeigen Sie explizit, dass $\partial F/\partial t = -\{F, H\}$ ist.

Aufgabe 17 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Betrachten Sie die dynamischen Variablen $Q_i(q_k, p_l)$ und $P_i(q_k, p_l)$. Es gelte

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0\,, \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch für Q_i und P_i kanonische Bewegungsgleichungen

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H(Q,P)}{\partial Q_i}$$

gelten, die Transformation $(q, p) \to (Q, P)$ also kanonisch ist.

Aufgabe 18 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Die Hamiltonfunktion für ein Teilchen im Schwerefeld ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens im Hamilton-Jacobi Formalismus.

a) Welche Koordinaten sind zyklisch ? Ersetzen Sie die zugehörigen Impulse durch die Konstanten α_x, α_y und wählen sie einen passenden Ansatz für die charakteristische Funktion W.

b) Lösen Sie die zugehörige Hamilton-Jacobi-Diffentialgleichung für W.

Bw.

c) Bestimmen Sie die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} Q_1 &= t+\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial E}, \\ Q_2 &= \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_x}, \\ Q_3 &= \beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_y}. \end{aligned}$$

d) Wählen Sie als Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = z(0) = p_y(0) = p_z(0) = 0$ und $p_x(0) = p_0$ und bestimmen Sie damit $x(t), y(t)$ und $z(t)$ aus dem Ergebnis aus Teilaufgabe (c).