Prof. Dr. J. Wambach
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorie klassischer Teilchen und Felder II

7. Übungsblatt

21. November 2006

Aufgabe 19 (schriftlich):

Gegeben sei ein Teilchen mit den Koordinaten $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ und dem Impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_x, p_y\}$, $\{L_y, p_y\}$ und $\{L_z, p_y\}$ wobei $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ der Drehimpuls des Teilchens ist.

b) Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{L_x, L_y\}$.

c) Können zwei Komponenten des Drehimpulses eines Teilchens (z.B. L_x, L_y) gleichzeitig als kanonische Impulse auftreten ?

Aufgabe 20 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

Es seien f, g und h dynamische Variable, die als Funktion von generalisierten Koordinaten q_i und der zugehörigen generalisierten Impulse p_i definiert sind. Beweisen Sie die sogenannte Jacobi-Identität der Poisson-Klammern,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Aufgabe 21 (in der Übungsgruppe vorzutragen):

In der Vorlesung wurde die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für das Kepler-Problem abgeleitet:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{\kappa}{r} = E$$

a) Benutzen Sie den Separationsansatz $W = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi)$ zsuammen mit $W_\varphi = \alpha_\varphi \varphi$ und separieren Sie die verbleibenden Variablen r, ϑ auf die linke und rechte Seite der DGL. Beide Seiten der Gleichung sind nun gleich einer Konstanten, die wir α_ϑ^2 nennen wollen. Nach Variablentrennung sollten Sie dann

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} &= \alpha_\vartheta^2 \\
\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2} &= 2m\left(E + \frac{\kappa}{r}\right)
\end{aligned}$$

erhalten. Zeigen Sie nun, dass α_ϑ^2 gleich dem Quadrat des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ ist.

Bw.

b) Berechnen Sie nun die Wirkungsvariablen

$$J_\varphi = \oint d\varphi p_\varphi, \qquad J_\vartheta = \oint d\vartheta p_\vartheta.$$

Hinweis: p_ϑ muss reell sein, daraus ergibt sich ein geschlossener Integrationsweg zwischen den Umkehrpunkten $\vartheta_{1,2}$. Bringen Sie dann das Integral auf die Form

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \frac{\Delta}{\sin\vartheta} = \left[-\frac{1}{2} \ln \frac{\Delta + \cos\vartheta}{\Delta - \cos\vartheta} + a \ln\left(a\cos\vartheta + \Delta\right) \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

mit den Abkürzungen

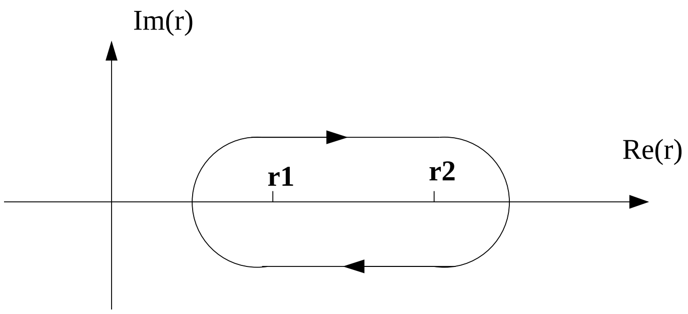
$$\Delta = \sqrt{1 - a\sin^2\vartheta}, \qquad a^2 = \frac{a_\vartheta^2}{a_\varphi^2}.$$

c) Berechnen Sie nun die verbleibende Wirkungsvariable $J_r = \oint drp_r$. Verwenden Sie zunächst die Ergebnise aus (b) um das Integral in die Form

$$J_r = \oint \sqrt{2m(E - V_{eff}(r)} dr$$

zu bringen. Wie sieht V_{eff} aus ? Berechnen Sie das Integral auf dem komplexen Integrationsweg der Skizze mit Hilfe des Residuensatzes.

Skizze:



d) Bestimmen Sie die neue Hamiltonfunktion $H(J_r, J_\varphi, J_\vartheta)$.