2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung” der Schrödinger-Gleichung:

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right) \Phi(\vec{r}, t)}$$

„Klein-Gordon-Gleichung" (Schrödinger, Fock, Klein, Gordon 1926)

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right) \Phi(\vec{r}, t)}$$

„Klein-Gordon-Gleichung" (Schrödinger, Fock, Klein, Gordon 1926)

  - part. Dgl. 2. Ordnung in Zeit- und Ortsableitungen
    (Schrödinger-Gleichung: 1. Ordnung Zeit, 2. Ordnung Ort)

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right)\Phi(\vec{r},t)}$$

„Klein-Gordon-Gleichung" (Schrödinger, Fock, Klein, Gordon 1926)

  - part. Dgl. 2. Ordnung in Zeit- und Ortsableitungen
    (Schrödinger-Gleichung: 1. Ordnung Zeit, 2. Ordnung Ort)

- Lorentz-invariante Form:

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(\vec{r},t) = 0}$$

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung" der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\Phi(\vec{r},t)}$$

„Klein-Gordon-Gleichung" (Schrödinger, Fock, Klein, Gordon 1926)

  - part. Dgl. 2. Ordnung in Zeit- und Ortsableitungen
    (Schrödinger-Gleichung: 1. Ordnung Zeit, 2. Ordnung Ort)

- Lorentz-invariante Form:

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

2.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Analoges Vorhehen zur „Herleitung” der Schrödinger-Gleichung:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$
  - Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right)\Phi(\vec{r},t)}$$

„Klein-Gordon-Gleichung” (Schrödinger, Fock, Klein, Gordon 1926)

  - part. Dgl. 2. Ordnung in Zeit- und Ortsableitungen
    (Schrödinger-Gleichung: 1. Ordnung Zeit, 2. Ordnung Ort)

- Lorentz-invariante Form:

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

$$\frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \equiv \lambda_C$$ „Compton-Wellenlänge”

- Lösungsansatz: $\Phi(t, \vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Viererschreibweise:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Viererschreibweise:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p \cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{r}$$

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

  $$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

  $\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Viererschreibweise:

  $$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p\cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{r}$$

  $\Rightarrow$ Die Lösung ist Lorentz-invariant: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \equiv \Phi(x)$

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Viererschreibweise:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p\cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{r}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung ist Lorentz-invariant: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \equiv \Phi(x)$

Einsetzen in die Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = \left[\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = \left[-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(x) \stackrel{!}{=} 0$$

- Lösungsansatz: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ (ebene Welle)

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(t,\vec{r}) = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ relativistische Energie-Impuls-Beziehung ✓

- Viererschreibweise:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p\cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{r}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung ist Lorentz-invariant: $\Phi(t,\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \equiv \Phi(x)$

Einsetzen in die Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = \left[\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = \left[-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} \overset{!}{=} m^2c^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 \quad ✓$$

Viererstromerhaltung

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi(x) = 0$

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi(x) = 0$

  komplex-konjugierte Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi^*(x) = 0$

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0$

  komplex-konjugierte Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi^*(x) = 0$

  $\Rightarrow \quad 0 = \Phi^*(x)\Box\Phi(x) \; - \; \Phi(x)\Box\Phi^*(x)$

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi(x) = 0$

  komplex-konjugierte Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi^*(x) = 0$

  $$\Rightarrow \quad 0 = \Phi^*(x)\Box\Phi(x) - \Phi(x)\Box\Phi^*(x)$$

  $$= \Phi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi^*(x)$$

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi(x) = 0$

  komplex-konjugierte Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi^*(x) = 0$

  $$\Rightarrow \quad 0 = \Phi^*(x)\Box\Phi(x) - \Phi(x)\Box\Phi^*(x)$$
  $$= \Phi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi^*(x)$$
  $$= \partial_\mu\left[\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial^\mu\Phi^*(x)\right]$$

Viererstromerhaltung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Klein-Gordon-Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi(x) = 0$

  komplex-konjugierte Gleichung: $\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Phi^*(x) = 0$

  $$\Rightarrow \quad 0 = \Phi^*(x)\Box\Phi(x) - \Phi(x)\Box\Phi^*(x)$$
  $$= \Phi^*(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial_\mu\partial^\mu\Phi^*(x)$$
  $$= \partial_\mu\left[\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial^\mu\Phi^*(x)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu(x) = 0}$$

  mit dem erhaltenen Viererstrom

  $$j^\mu(x) = \alpha\left(\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) - \Phi(x)\partial^\mu\Phi^*(x)\right)$$
  $$\equiv \alpha\,\Phi^*(x)\left(\partial^\mu - \overleftarrow{\partial}^\mu\right)\Phi(x), \qquad \alpha\text{: zunächst beliebige Konstante}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

→ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte
$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

→ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte
$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Bestimmung der Konstante: $\vec{j} \overset{!}{=} \vec{j}_{\text{Schrödinger}}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

$\rightarrow$ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Bestimmung der Konstante: $\vec{j} \stackrel{!}{=} \vec{j}_{\text{Schrödinger}}$

$$\vec{j} \equiv (j^k) = \alpha\left(\Phi^*(\partial^k)\Phi - \Phi(\partial^k)\Phi^*\right)$$

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

→ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Bestimmung der Konstante: $\vec{j} \stackrel{!}{=} \vec{j}_{\text{Schrödinger}}$

$$\vec{j} \equiv (j^k) = \alpha\left(\Phi^*(-\vec{\nabla})\Phi - \Phi(-\vec{\nabla})\Phi^*\right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

$\rightarrow$ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Bestimmung der Konstante: $\vec{j} \overset{!}{=} \vec{j}_{\text{Schrödinger}}$

$$\vec{j} \equiv (j^k) = \alpha \left(\Phi^*(-\vec{\nabla})\Phi - \Phi(-\vec{\nabla})\Phi^*\right) \overset{!}{=} \frac{\hbar}{2mi}\left(\Phi^*\vec{\nabla}\,\Phi - \Phi\vec{\nabla}\,\Phi^*\right)$$

- Aufspaltung in Komponenten: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

$\rightarrow$ naheliegende Interpretation: ρ = Wahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte

- Bestimmung der Konstante: $\vec{j} \overset{!}{=} \vec{j}_{\text{Schrödinger}}$

$$\vec{j} \equiv (j^k) = \alpha \left(\Phi^*(-\vec{\nabla})\Phi - \Phi(-\vec{\nabla})\Phi^* \right) \overset{!}{=} \frac{\hbar}{2mi} \left(\Phi^* \vec{\nabla}\, \Phi - \Phi \vec{\nabla}\, \Phi^* \right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{i\hbar}{2m}$$

- Nullkomponente: $\rho = \frac{1}{c} j^0 = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^* \right)$

- Nullkomponente: $\rho \;=\; \frac{1}{c}j^0 \;=\; \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Phi^*\frac{\partial}{\partial t}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial t}\Phi^*\right)$
- eben Welle: $\Phi(t,\vec{r}) \;=\; \mathcal{N}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$

- Nullkomponente: $\rho = \frac{1}{c} j^0 = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^* \right)$
- eben Welle: $\Phi(t, \vec{r}) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$

  $\Rightarrow \quad \rho = |\mathcal{N}|^2 \frac{E}{mc^2}$

  - nichtrelativistischer Grenzfall: $E \to mc^2 \quad \Rightarrow \quad \rho \to |\mathcal{N}|^2 \quad \checkmark$
  - Nullkomponente eines Vierervektors:
    $\propto E \quad \leftrightarrow$ Lorentzkontraktion des Volumens $\leftrightarrow$ größere Dichte

Fundamentale Probleme

Fundamentale Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

Fundamentale Probleme

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:
  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

Fundamentale Probleme

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:

  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

$\Rightarrow$ Stabilitätsprobleme!

Fundamentale Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:
  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

$\Rightarrow$ Stabilitätsprobleme!

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Fundamentale Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:
  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

$\Rightarrow$ Stabilitätsprobleme!

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation

  ebene Welle: $\rho = |\mathcal{N}|^2 \frac{E}{mc^2}$

Fundamentale Probleme

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:

  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

$\Rightarrow$ Stabilitätsprobleme!

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation

  ebene Welle: $\rho = |\mathcal{N}|^2 \, \frac{E}{mc^2}$ negativ für $E < 0$

Fundamentale Probleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  beide im Einklang mit der Klein-Gordon-Gleichung

$\Rightarrow$ Das Energiespektrum ist nicht nach unten beschränkt:

  - negative Energien mit beliebig großem $|E|$ möglich
  - E kann durch Vergrößerung des Impulses verringert werden.

$\Rightarrow$ Stabilitätsprobleme!

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation

  ebene Welle: $\rho = |\mathcal{N}|^2 \, \frac{E}{mc^2}$ negativ für $E < 0$

- Auflösung der Probleme erst im Rahmen der Quantenfeldtheorie

  (negative Energien $\leftrightarrow$ Antiteilchen, ρ = Ladungsdichte)

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)
- Beschreibung von Wechselwirkungen:
  - Schrödinger: Addiere Potenzialterm

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)
- Beschreibung von Wechselwirkungen:
  - Schrödinger: Addiere Potenzialterm
  - Ähnliches Vorgehen in der Klein-Gordon-Theorie:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, \vec{r}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + \left(mc^2 + V(t, \vec{r})\right)^2\right) \Phi(t, \vec{r})$$

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)
- Beschreibung von Wechselwirkungen:
  - Schrödinger: Addiere Potenzialterm
  - Ähnliches Vorgehen in der Klein-Gordon-Theorie:
    $$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, \vec{r}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + \left(mc^2 + V(t, \vec{r})\right)^2\right) \Phi(t, \vec{r})$$
  - Anforderungen an eine relativistische Theorie:
    korrektes Verhalten unter Lorentz-Transformationen $x \to x' = \Lambda x$

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)
- Beschreibung von Wechselwirkungen:
  - Schrödinger: Addiere Potenzialterm
  - Ähnliches Vorgehen in der Klein-Gordon-Theorie:

    $$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, \vec{r}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + \left(mc^2 + V(t, \vec{r})\right)^2\right) \Phi(t, \vec{r})$$
  - Anforderungen an eine relativistische Theorie:
    korrektes Verhalten unter Lorentz-Transformationen $x \to x' = \Lambda x$
  - erfüllt für Skalarfelder $V(t, \vec{r}) = V(x)$: $\quad V'(x) = V(\Lambda^{-1} x)$

2.4 Die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bislang: freie Klein-Gordon-Gleichung (keine Wechselwirkung)
- Beschreibung von Wechselwirkungen:
  - Schrödinger: Addiere Potenzialterm
  - Ähnliches Vorgehen in der Klein-Gordon-Theorie:

    $$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t,\vec{r}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + \left(mc^2 + V(t,\vec{r})\right)^2\right) \Phi(t,\vec{r})$$
  - Anforderungen an eine relativistische Theorie:

    korrektes Verhalten unter Lorentz-Transformationen $x \to x' = \Lambda x$
  - erfüllt für Skalarfelder $V(t,\vec{r}) = V(x)$: $\quad V'(x) = V(\Lambda^{-1} x)$
- Coulomb-Potenzial: Nullkomponente des Viererpotenzials $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
  - Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \;\longrightarrow\; \vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder

Ankopplung des elektromagnetisches Feldes in der klassischen Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ankopplung des elektromagnetisches Feldes in der klassischen Mechanik

- Bewegungsgleichung einer Punktladung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}\right) \quad \text{(Lorentzkraft)}$$

Ankopplung des elektromagnetisches Feldes in der klassischen Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bewegungsgleichung einer Punktladung:

  $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentzkraft)}$$

  lässt sich mit $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

  und den Euler-Lagrange-Gleichungen $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}^k} - \frac{\partial L}{\partial r^k} = 0$

  aus der Lagrange-Funktion

  $$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\phi(t, \vec{r}) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(t, \vec{r})$$ herleiten.

Ankopplung des elektromagnetisches Feldes in der klassischen Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bewegungsgleichung einer Punktladung:

  $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentzkraft)}$$

  lässt sich mit $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

  und den Euler-Lagrange-Gleichungen $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}^k} - \frac{\partial L}{\partial r^k} = 0$

  aus der Lagrange-Funktion

  $$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\phi(t, \vec{r}) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) \qquad \text{herleiten.}$$

- kanonisch konjugierter Impuls: $\quad p^k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^k} = m\dot{r}^k + \frac{q}{c} A^k$

Ankopplung des elektromagnetisches Feldes in der klassischen Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bewegungsgleichung einer Punktladung:

  $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentzkraft)}$$

  lässt sich mit $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

  und den Euler-Lagrange-Gleichungen $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}^k} - \frac{\partial L}{\partial r^k} = 0$

  aus der Lagrange-Funktion

  $$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\phi(t, \vec{r}) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) \qquad \text{herleiten.}$$

- kanonisch konjugierter Impuls: $\quad p^k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^k} = m\dot{r}^k + \frac{q}{c} A^k$

  $\Rightarrow$ Hamilton-Funktion:

  $$H \equiv \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} + q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + q\phi$$

$$\Leftrightarrow \qquad H - q\phi \; = \; \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

$$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

ohne elektromagnetisches Feld: $E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

ohne elektromagnetisches Feld: $E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$\Rightarrow$ Effekt des elektromagnetisches Feldes:

$E \to E - q\phi \,, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ „minimale Substitution”

$$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

ohne elektromagnetisches Feld: $E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$\Rightarrow$ Effekt des elektromagnetisches Feldes:

$E \to E - q\phi\,, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ „minimale Substitution"

- kovariant: $p^\mu \to p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$

$$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

ohne elektromagnetisches Feld: $E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$\Rightarrow$ Effekt des elektromagnetisches Feldes:

$E \to E - q\phi\,, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ „minimale Substitution”

- kovariant: $p^\mu \to p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$

- analoge Ersetzungsvorschrift in der QM:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\,, \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

ohne elektromagnetisches Feld: $E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$\Rightarrow$ Effekt des elektromagnetisches Feldes:

$E \to E - q\phi\,, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ „minimale Substitution”

- kovariant: $p^\mu \to p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$

- analoge Ersetzungsvorschrift in der QM:

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\,, \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$

- kovariant: $D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu$

$\Leftrightarrow \quad H - q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$

ohne elektromagnetisches Feld: $\quad E = H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$\Rightarrow$ Effekt des elektromagnetisches Feldes:

$E \to E - q\phi\,, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ „minimale Substitution"

- kovariant: $\quad p^\mu \to p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu$

- analoge Ersetzungsvorschrift in der QM:

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\,, \qquad \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$

- kovariant: $\quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu$ „kovariante Ableitung"[1]

[1] Der Name hat nichts mit Lorentz-Kovarianz zu tun, sondern mit dem Verhalten unter Eichtransformationen.

→ Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{\left[D_\mu D^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

→ Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{\left[D_\mu D^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

- explizit:

$$\boxed{\left[\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

→ Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{\left[D_\mu D^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

- explizit:

$$\boxed{\left[\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0}$$

- nicht explizit kovariante Form:

$$\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2\Phi(t,\vec{r}) = \left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right]\Phi(t,\vec{r})}$$

→ Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{\left[D_\mu D^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) \;=\; 0}$$

- explizit:

$$\boxed{\left[\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) \;=\; 0}$$

- nicht explizit kovariante Form:

$$\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2\Phi(t,\vec{r}) \;=\; \left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right]\Phi(t,\vec{r})}$$

- erhaltener Viererstrom: $(\rightarrow$ Übung$)$

$$j^\mu(x) \;=\; \frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x) \,-\, \Phi(x)\partial^\mu\Phi^*(x)\right) - \frac{q}{mc}\,\Phi^*(x)\Phi(x)A^\mu(x)$$

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2.5 Die Dirac-Gleichung

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$ $\rightarrow$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

2.5 Die Dirac-Gleichung

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \quad \longrightarrow$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow \quad E$ nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4 \quad \longrightarrow$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$ nicht nach unten beschränkt

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\longrightarrow$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \;\longrightarrow$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ nicht nach unten beschränkt

- Alternativen?

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\longrightarrow$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \;\longrightarrow$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ nicht nach unten beschränkt

- Alternativen?
- Einschränkung auf positive Wurzel: $E \;=\; +\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\; \longrightarrow$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \;\; \longrightarrow$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ nicht nach unten beschränkt

- Alternativen?
- Einschränkung auf positive Wurzel: $\quad E \;=\; +\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi \;=\; \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\vec{\nabla}^2}\,\psi \;=\; \left(mc^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\vec{\nabla}^4 - \ldots\right)\psi$$

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\;\longrightarrow\;\;$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \;\;\longrightarrow\;\;$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ nicht nach unten beschränkt

- Alternativen?
- Einschränkung auf positive Wurzel: $E \;=\; +\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  $$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi \;=\; \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\vec{\nabla}^2}\,\psi \;=\; \left(mc^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\vec{\nabla}^4 - \ldots\right)\psi$$

  $\longrightarrow$ nichtlokale Theorie (beliebig hohe Gradienten)

2.5 Die Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schrödinger-Gleichung:

  $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\longrightarrow\;$ DGl. 1. Ordnung in t, 2. Ordnung in $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ E nach unten beschränkt, aber Gleichung nicht Lorentz-kovariant

- Klein-Gordon-Gleichung:

  $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \;\longrightarrow\;$ DGl. 2. Ordnung in t und $\vec{r}$

  $\Rightarrow$ Lorentz-kovariant, aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$ nicht nach unten beschränkt

- Alternativen?
- Einschränkung auf positive Wurzel: $E = +\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

  $$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\vec{\nabla}^2}\,\psi = \left(mc^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\vec{\nabla}^4 - \dots\right)\psi$$

  $\longrightarrow$ nichtlokale Theorie (beliebig hohe Gradienten)

  $\longrightarrow$ akausal (Ausbreitung von Signalen mit Überlichtgeschwindigkeit)

- Ansatz von Dirac: 1. Ordnung in Raum- und Zeitkoordinaten

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \psi(t, \vec{r}) \;=\; H_{\mathrm{D}}\, \psi(t, \vec{r}) \;:=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\, \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right)\, \psi(t, \vec{r})}$$

freie Dirac-Gleichung in nicht explizit kovarianter Form (1928)

  - α^k, β: zu bestimmende Konstanten

- Ansatz von Dirac: 1. Ordnung in Raum- und Zeitkoordinaten

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\vec{r}) \;=\; H_{\mathrm{D}}\,\psi(t,\vec{r}) \;:=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\,\psi(t,\vec{r})}$$

freie Dirac-Gleichung in nicht explizit kovarianter Form (1928)

  - α^k, β: zu bestimmende Konstanten
  - Rotationsinvarianz:
    zumindest α^k keine gewöhnliche Zahlen $\rightarrow$ Matrizen

- Ansatz von Dirac: 1. Ordnung in Raum- und Zeitkoordinaten

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\vec{r}) \;=\; H_\mathrm{D}\,\psi(t,\vec{r}) \;:=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\,\psi(t,\vec{r})}$$

freie Dirac-Gleichung in nicht explizit kovarianter Form (1928)

  - α^k, β: zu bestimmende Konstanten
  - Rotationsinvarianz:
    zumindest α^k keine gewöhnliche Zahlen $\rightarrow$ Matrizen

- zweimalige Anwendung der Gleichung:

$$\left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \;i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\;H_\mathrm{D}\;\psi$$

- Ansatz von Dirac: 1. Ordnung in Raum- und Zeitkoordinaten

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \psi(t,\vec{r}) \;=\; H_\mathrm{D}\, \psi(t,\vec{r}) \;:=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\, \alpha^k \partial_k + \beta m c^2\right)\, \psi(t,\vec{r})}$$

freie Dirac-Gleichung in nicht explizit kovarianter Form (1928)

  - α^k, β: zu bestimmende Konstanten
  - Rotationsinvarianz:
    zumindest α^k keine gewöhnliche Zahlen $\rightarrow$ Matrizen

- zweimalige Anwendung der Gleichung:

$$\left(i\hbar \tfrac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = i\hbar \tfrac{\partial}{\partial t}\, H_\mathrm{D}\, \psi \;=\; H_\mathrm{D}^2\, \psi$$

- Ansatz von Dirac: 1. Ordnung in Raum- und Zeitkoordinaten

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\vec{r}) \;=\; H_{\mathrm{D}}\,\psi(t,\vec{r}) \;:=\; \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\,\psi(t,\vec{r})}$$

freie Dirac-Gleichung in nicht explizit kovarianter Form (1928)

  - α^k, β: zu bestimmende Konstanten
  - Rotationsinvarianz:
    zumindest α^k keine gewöhnliche Zahlen $\rightarrow$ Matrizen

- zweimalige Anwendung der Gleichung:

$$\left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\,H_{\mathrm{D}}\,\psi \;=\; H_{\mathrm{D}}^2\,\psi \;=\; \left(\tfrac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\tfrac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\,\psi$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\,\psi$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\,\psi$$
$$= \left(-\hbar^2 c^2\,\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\,\psi$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\psi$$

$$= \left(-\hbar^2c^2\,\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\left\{\alpha^k,\beta\right\}\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

mit dem Antikommutator $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

$$
\begin{aligned}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi &= \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\,\psi \\
&= \left(-\hbar^2c^2\,\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\,\psi \\
&= \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\left\{\alpha^k,\beta\right\}\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\,\psi
\end{aligned}
$$

mit dem Antikommutator $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

- Begründung für den letzten Schritt:

$$
\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l \;\equiv\; \sum_{k,l=1}^{3}\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\left(\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \alpha^l\alpha^k\,\partial_l\partial_k\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi &= \left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^k\partial_k + \beta mc^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\,\alpha^l\partial_l + \beta mc^2\right)\,\psi \\
&= \left(-\hbar^2c^2\,\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\,\psi \\
&= \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\left\{\alpha^k,\beta\right\}\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\,\psi
\end{aligned}
$$

mit dem Antikommutator $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

- Begründung für den letzten Schritt:

$$
\begin{aligned}
\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l &\equiv \sum_{k,l=1}^{3}\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\left(\alpha^k\alpha^l\,\partial_k\partial_l + \alpha^l\alpha^k\,\partial_l\partial_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\left(\alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k\right)\partial_k\partial_l \equiv \frac{1}{2}\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\partial_k\partial_l
\end{aligned}
$$

- also:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = \left(-\frac{1}{2}\hbar^2 c^2 \left\{\alpha^k, \alpha^l\right\} \partial_k \partial_l + \frac{\hbar c}{i} mc^2 \left\{\alpha^k, \beta\right\} \partial_k + m^2 c^4 \beta^2 \right) \psi$$

- also:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\left\{\alpha^k,\beta\right\}\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

- angewendet auf eine ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) = \psi_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$:

$$E^2\psi = \left(\frac{1}{2}\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}p_kp_l\,c^2 + \left\{\alpha^k,\beta\right\}p_k mc^3 + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

- also:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\left\{\alpha^k,\beta\right\}\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

- angewendet auf eine ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) = \psi_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$:

$$E^2\psi = \left(\frac{1}{2}\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}p_kp_l\,c^2 + \left\{\alpha^k,\beta\right\}p_k mc^3 + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4\right)\psi$$

- also:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(-\frac{1}{2}\hbar^2c^2\,\{\alpha^k,\alpha^l\}\,\partial_k\partial_l + \frac{\hbar c}{i}\,mc^2\,\{\alpha^k,\beta\}\,\partial_k + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

- angewendet auf eine ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) = \psi_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$:

$$E^2\psi = \left(\frac{1}{2}\{\alpha^k,\alpha^l\}\,p_kp_l\,c^2 + \{\alpha^k,\beta\}\,p_k mc^3 + m^2c^4\beta^2\right)\psi$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4\right)\psi$$

$\Rightarrow$ α^k und β sind Matrizen mit

$$\boxed{\{\alpha^k,\alpha^l\} = 2\delta^{kl}\,, \qquad \{\alpha^k,\beta\} = 0\,, \qquad \beta^2 = 1}$$