ii) negative Energien

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  → $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  → $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

- alternativer Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(-)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  ➞ $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

- alternativer Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(-)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$
  - schreibe nach wie vor: $p \cdot x = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p^{(-)}(x) = -E\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Energie} = -E$$

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}\, \psi_p^{(-)}(x) = -\vec{p}\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Impuls} = -\vec{p}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  $\rightarrow$ $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

- alternativer Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(-)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$
  - schreibe nach wie vor: $p \cdot x = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\Rightarrow \; i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p^{(-)}(x) = -E\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \rightarrow \quad \text{Energie} = -E \overset{!}{<} 0 \Rightarrow E > 0$$

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}\, \psi_p^{(-)}(x) = -\vec{p}\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \rightarrow \quad \text{Impuls} = -\vec{p}$$

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  ➞ $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

- alternativer Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(-)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$
  - schreibe nach wie vor: $p \cdot x = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

    $$\Rightarrow \; i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p^{(-)}(x) = -E\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Energie} = -E \overset{!}{<} 0 \Rightarrow E > 0$$

    $$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}\, \psi_p^{(-)}(x) = -\vec{p}\, \psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Impuls} = -\vec{p}$$

  - Ersetzung $(E, \vec{p}) \to (-E, -\vec{p}) \;\Leftrightarrow\;$ Vertauschung $\varphi \leftrightarrow \chi$

ii) negative Energien

- einzige Stelle, an der zuvor $E > 0$ einging: Eliminierung von χ

  ➞ $E < 0$: gleicher Ansatz, aber eliminiere φ

- alternativer Ansatz: $\psi(x) = \psi_p^{(-)}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar} p \cdot x}$

  - schreibe nach wie vor: $p \cdot x = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\Rightarrow \; i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p^{(-)}(x) = -E\,\psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Energie} = -E \overset{!}{<} 0 \Rightarrow E > 0$$

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\,\psi_p^{(-)}(x) = -\vec{p}\,\psi_p^{(-)}(x) \quad \longrightarrow \quad \text{Impuls} = -\vec{p}$$

  - Ersetzung $(E, \vec{p}) \to (-E, -\vec{p}) \;\Leftrightarrow\;$ Vertauschung $\varphi \leftrightarrow \chi$

$\Rightarrow$ lin. unabh. Lösungen: $\chi_\uparrow = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \chi_\downarrow = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi(p) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2}\, \chi(p)$

Zusammenstellung der freien Lösungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- positive Energie:

$$\psi^{(+)}_{p,s}(x) = u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x}$$

$$u_{1,2}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{p}) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\, \varphi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_\uparrow(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_\downarrow(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- negative Energie:

$$\psi^{(-)}_{p,s}(x) = v_s(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x}$$

$$v_{1,2}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\, \chi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{p}) \\ \chi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \chi_\uparrow(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_\downarrow(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- in beiden Fällen: $p \cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$ mit $E = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$

- explizit:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \sigma^1 p_x + \sigma^2 p_y + \sigma^3 p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_1(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u_2(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x-ip_y)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$

$$v_1(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{(p_x-ip_y)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{p}) = \mathcal{N}(\vec{p}) \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger \psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c} j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

Normierung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger \psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\, j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  ➞ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\, j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\rightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

  $\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\,\psi^{(+)}_{p,s}$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger \psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\, j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\rightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

  $\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\,\psi^{(+)}_{p,s} \;=\; u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p})$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger \psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\, j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\to$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

  $$\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\,\psi^{(+)}_{p,s} \;=\; u^\dagger_s(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) \;=\; \left(\varphi^\dagger_s(\vec{p}),\; \varphi^\dagger_s(\vec{p})\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\right) \begin{pmatrix} \varphi_s(\vec{p}) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi_s(\vec{p}) \end{pmatrix}$$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\, j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\rightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

$$\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\,\psi^{(+)}_{p,s} = u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = \left(\varphi_s^\dagger(\vec{p}),\ \varphi_s^\dagger(\vec{p})\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix} \varphi_s(\vec{p}) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi_s(\vec{p}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{(E+mc^2)^2}\right)|\varphi_s(\vec{p})|^2$$

Normierung

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $$\psi^\dagger\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \tfrac{1}{c}\,j^0 \quad \text{mit Viererstrom} \quad j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

  $\longrightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

$$\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\psi^{(+)}_{p,s} = u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = \left(\varphi_s^\dagger(\vec{p}),\ \varphi_s^\dagger(\vec{p})\tfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_s(\vec{p})\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi_s(\vec{p})\end{pmatrix}$$

$$= \left(1+\frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{(E+mc^2)^2}\right)|\varphi_s(\vec{p})|^2 \qquad = \frac{2E}{E+mc^2}\,|\mathcal{N}(\vec{p})|^2$$

Normierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\,j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\rightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

$$\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\psi^{(+)}_{p,s} = u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = \left(\varphi_s^\dagger(\vec{p}),\ \varphi_s^\dagger(\vec{p})\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_s(\vec{p})\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi_s(\vec{p})\end{pmatrix}$$

$$= \left(1+\frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{(E+mc^2)^2}\right)|\varphi_s(\vec{p})|^2 = \frac{2E}{E+mc^2}\,|\mathcal{N}(\vec{p})|^2$$

- analog für negative Energien: $\psi^{(-)\,\dagger}_{p,i}\psi^{(-)}_{p,i} = v_s^\dagger(\vec{p})\,v_s(\vec{p}) = \frac{2E}{E+mc^2}\,|\mathcal{N}(\vec{p})|^2$

Normierung

- Wahrscheinlichkeitsdichte:

  $\psi^\dagger\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \frac{1}{c}\,j^0$ mit Viererstrom $j^\mu = c\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$

  $\longrightarrow$ sollte sich proportional zu $p^0 = E$ transformieren, z.B. $\psi^\dagger\psi = \frac{E}{mc^2}$

- positive Energien:

$$\psi^{(+)\,\dagger}_{p,s}\psi^{(+)}_{p,s} = u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = \left(\varphi_s^\dagger(\vec{p}),\ \varphi_s^\dagger(\vec{p})\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi_s(\vec{p})\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}c}{E+mc^2}\,\varphi_s(\vec{p})\end{pmatrix}$$

$$= \left(1+\frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{(E+mc^2)^2}\right)|\varphi_s(\vec{p})|^2 = \frac{2E}{E+mc^2}\,|\mathcal{N}(\vec{p})|^2$$

- analog für negative Energien: $\psi^{(-)\,\dagger}_{p,i}\psi^{(-)}_{p,i} = v_s^\dagger(\vec{p})\,v_s(\vec{p}) = \frac{2E}{E+mc^2}\,|\mathcal{N}(\vec{p})|^2$

- Forderung: $u_s^\dagger(\vec{p})\,u_s(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})\,v_s(\vec{p}) \stackrel{!}{=} \frac{E}{mc^2} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{N}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}$

Weitere Relationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mit der Normierung

- $u_s(\vec{p})^\dagger u_s(\vec{p}) \;=\; v_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \;=\; \frac{E}{mc^2}$

gelten auch die Orthonormierungsrelationen

- $\bar{u}_r(\vec{p}) u_s(\vec{p}) \;=\; -\bar{v}_r(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \;=\; \delta_{rs} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{u}_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) \;=\; 1, \quad \bar{v}_s(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \;=\; -1}$
- $\bar{u}_r(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \;=\; \bar{v}_r(\vec{p}) u_s(\vec{p}) \;=\; 0$
- $u_r(\vec{p})^\dagger u_s(\vec{p}) \;=\; v_r(\vec{p})^\dagger v_s(\vec{p}) \;=\; \frac{E}{mc^2}\,\delta_{rs}$
- $u_r(\vec{p})^\dagger v_s(-\vec{p}) \;=\; v_r(\vec{p})^\dagger u_s(-\vec{p}) \;=\; 0$

Energie-Projektoren

Energie-Projektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi^{(+)}_{p,s}(x) = u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \;\Rightarrow\; p\!\!\!/\, u_s(\vec{p}) = mc\, u_s(\vec{p})$

  $\psi(x) = \psi^{(-)}_{p,s}(x) = v_s(\vec{p})\, e^{+\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \;\Rightarrow\; p\!\!\!/\, v_s(\vec{p}) = -mc\, v_s(\vec{p})$

Energie-Projektoren

- $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi^{(+)}_{p,s}(x) = u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, u_s(\vec{p}) = mc\, u_s(\vec{p})$

$$\psi(x) = \psi^{(-)}_{p,s}(x) = v_s(\vec{p})\, e^{+\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, v_s(\vec{p}) = -mc\, v_s(\vec{p})$$

→ Projektionsoperatoren auf pos. / neg. Energien: $\Lambda_\pm = \frac{\pm p\!\!\!/ + mc}{2mc}$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_+(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = u_s(\vec{p}), \qquad \Lambda_+(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = 0$$

$$\Lambda_-(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = 0, \qquad \Lambda_-(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = v_s(\vec{p})$$

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+, \qquad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \qquad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0$$

Energie-Projektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi^{(+)}_{p,s}(x) = u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, u_s(\vec{p}) = mc\, u_s(\vec{p})$

  $\psi(x) = \psi^{(-)}_{p,s}(x) = v_s(\vec{p})\, e^{+\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, v_s(\vec{p}) = -mc\, v_s(\vec{p})$

→ Projektionsoperatoren auf pos. / neg. Energien: $\Lambda_\pm = \frac{\pm p\!\!\!/ + mc}{2mc}$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_+(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = u_s(\vec{p})\,, \qquad \Lambda_+(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = 0$$

$$\Lambda_-(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = 0\,, \qquad \Lambda_-(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = v_s(\vec{p})$$

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+\,, \qquad \Lambda_-^2 = \Lambda_-\,, \qquad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0$$

- Aus den Orthonormierungsrelationen folgt andererseits:

$$\sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\, \underbrace{\bar{u}_r(\vec{p})\, u_s(\vec{p})}_{=\delta_{rs}} = u_s(\vec{p}), \quad \sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\, \underbrace{\bar{u}_r(\vec{p})\, v_s(\vec{p})}_{=0} = 0 \Rightarrow \Lambda_+(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})$$

analog: $\Lambda_-(\vec{p}) = -\sum_{r=1}^{2} v_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})$

Energie-Projektoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi^{(+)}_{p,s}(x) = u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, u_s(\vec{p}) = mc\, u_s(\vec{p})$

$$\psi(x) = \psi^{(-)}_{p,s}(x) = v_s(\vec{p})\, e^{+\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \Rightarrow p\!\!\!/\, v_s(\vec{p}) = -mc\, v_s(\vec{p})$$

→ Projektionsoperatoren auf pos. / neg. Energien: $\Lambda_\pm = \frac{\pm p\!\!\!/ + mc}{2mc}$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_+(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = u_s(\vec{p})\,, \qquad \Lambda_+(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = 0$$

$$\Lambda_-(\vec{p})\, u_s(\vec{p}) = 0\,, \qquad \Lambda_-(\vec{p})\, v_s(\vec{p}) = v_s(\vec{p})$$

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+\,, \qquad \Lambda_-^2 = \Lambda_-\,, \qquad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0$$

- Aus den Orthonormierungsrelationen folgt andererseits:

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}), \qquad \Lambda_-(\vec{p}) = -\sum_{r=1}^{2} v_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{p\!\!\!/ + mc}{2mc}\,, \qquad \sum_{r=1}^{2} v_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p}) = \frac{p\!\!\!/ - mc}{2mc}$$

Anmerkungen

Anmerkungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- masselose Teilchen: $m = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{mc^2}$ divergiert

  → wähle andere Normierung, z.B. $u_s^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) \;=\; v_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) \overset{!}{=} 2E$

  $$\Rightarrow \quad \bar{u}_s(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p})v_s(\vec{p}) = 0$$

Anmerkungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- masselose Teilchen: $m = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{mc^2}$ divergiert

  → wähle andere Normierung, z.B. $u_s^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) \;=\; v_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) \overset{!}{=} 2E$

  $$\Rightarrow \quad \bar{u}_s(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p})v_s(\vec{p}) = 0$$

- Wie in der nichtrel. QM will man eigentlich Wahrscheinlichkeiten normieren, ein Teilchen in einem bestimmten Volumen (oder im ganzen Raum) zu finden:

  $$\int_V d^3x\, \psi^\dagger\psi \overset{!}{=} 1$$

  Man behält auch dann die Normierung der u_i und v_i bei und führt zusätzliche Normierungsfaktoren ein.

Wellenpakete

Wellenpakete

- Dirac-Gleichung: $(i\not\partial - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ linear und homogen

  $\Rightarrow$ Superpositionen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen.

Wellenpakete

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ linear und homogen

  $\Rightarrow$ Superpositionen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen.

→ Wellenpaket:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{s=1}^{2} \left(b(\vec{p}, s)\, u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} + d^*(\vec{p}, s)\, v_s(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x} \right)$$

  - Fourierkoeffizienten $b(\vec{p}, s)$, $d(\vec{p}, s)$
  - komplexe Konjugation d^*: hier Konvention (bekommt Bedeutung in der QFT)

Wellenpakete

- Dirac-Gleichung: $(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ linear und homogen

  $\Rightarrow$ Superpositionen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen.

$\longrightarrow$ Wellenpaket:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{s=1}^{2} \left(b(\vec{p}, s)\, u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} + d^*(\vec{p}, s)\, v_s(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x} \right)$$

  - Fourierkoeffizienten $b(\vec{p}, s)$, $d(\vec{p}, s)$
  - komplexe Konjugation d^*: hier Konvention (bekommt Bedeutung in der QFT)
  - Lorentzinvariantes Integralmaß:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} = 2\pi\hbar\, mc \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\, \delta(p^2 - m^2c^2) \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$$

Wellenpakete

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ linear und homogen

  $\Rightarrow$ Superpositionen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen.

$\longrightarrow$ Wellenpaket:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \sum_{s=1}^{2} \left(b(\vec{p}, s)\, u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} + d^*(\vec{p}, s)\, v_s(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x} \right)$$

  - Fourierkoeffizienten $b(\vec{p}, s)$, $d(\vec{p}, s)$
  - komplexe Konjugation d^*: hier Konvention (bekommt Bedeutung in der QFT)
  - Lorentzinvariantes Integralmaß:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} = 2\pi\hbar\, mc \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\, \delta(p^2 - m^2c^2) \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$$

- Normierung: $\int d^3x\, \psi^\dagger(x)\psi(x) \overset{!}{=} 1$

Wellenpakete

- Dirac-Gleichung: $(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ linear und homogen

  $\Rightarrow$ Superpositionen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen.

→ Wellenpaket:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{mc^2}{E} \sum_{s=1}^{2} \Big(b(\vec{p},s)\, u_s(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} + d^*(\vec{p},s)\, v_s(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x} \Big)$$

  - Fourierkoeffizienten $b(\vec{p},s)$, $d(\vec{p},s)$
  - komplexe Konjugation d^*: hier Konvention (bekommt Bedeutung in der QFT)
  - Lorentzinvariantes Integralmaß:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{mc^2}{E} = 2\pi\hbar\, mc \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\, \delta(p^2 - m^2c^2) \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$$

- Normierung: $\int d^3x\, \psi^\dagger(x)\psi(x) \stackrel{!}{=} 1$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{mc^2}{E} \sum_{s=1}^{2} \Big(|b(\vec{p},s)|^2 + |d(\vec{p},s)|^2 \Big) = 1 \quad \text{zeitunabhängig} \checkmark$$

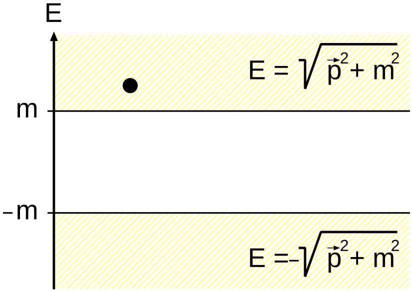
2.8 Interpretation der Lösungen mit negativer Energie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.8 Interpretation der Lösungen mit negativer Energie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Instabilitätsproblem:

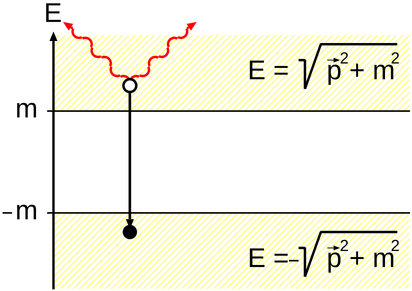


Ein Elektron könnte seine Energie durch Abstrahlung von Photonen immer weiter verringern.

(alle Bilder in diesem Abschnitt in „natürlichen Einheiten": $c = 1$)

2.8 Interpretation der Lösungen mit negativer Energie

- Instabilitätsproblem:



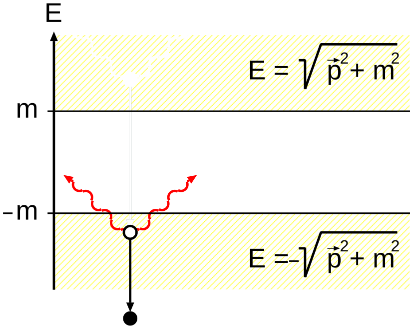
Ein Elektron könnte seine Energie durch Abstrahlung von Photonen immer weiter verringern.

(alle Bilder in diesem Abschnitt in „natürlichen Einheiten": $c = 1$)

2.8 Interpretation der Lösungen mit negativer Energie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Instabilitätsproblem:



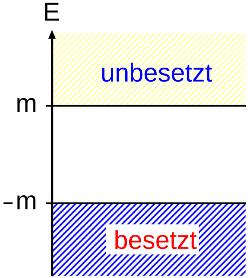
Ein Elektron könnte seine Energie durch Abstrahlung von Photonen immer weiter verringern.

(alle Bilder in diesem Abschnitt in „natürlichen Einheiten”: $c = 1$)

$\Rightarrow$ Alle Atome würden zerfallen (Lebensdauer $\tau = 0$)!

Lösungsvorschlag von Dirac: „Löchertheorie"

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

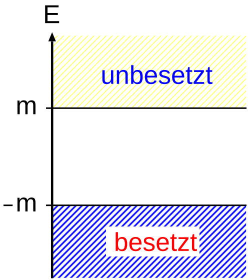


Lösungsvorschlag von Dirac: „Löchertheorie”

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- physikalisches Vakuum („Dirac-See”):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

$\Rightarrow$ Zerfall zusätzlicher $E > 0$-Fermionen in Zustände negativer Energie Pauli-verboten!

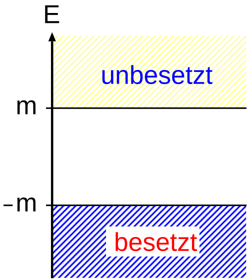


Lösungsvorschlag von Dirac: „Löchertheorie"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

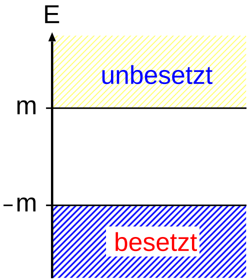
$\Rightarrow$ Zerfall zusätzlicher $E > 0$-Fermionen in Zustände negativer Energie Pauli-verboten!



- besetzter Dirac-See:
  - Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für Elektronen)

Lösungsvorschlag von Dirac: „Löchertheorie"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

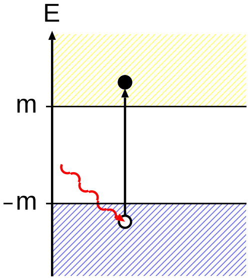
$\Rightarrow$ Zerfall zusätzlicher $E > 0$-Fermionen in Zustände negativer Energie Pauli-verboten!

- besetzter Dirac-See:
  - Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für Elektronen)
  - „Renormierung":
    Energie und Ladung werden relativ zum gefüllten Dirac-See gemessen.

- Konsequenz:

  Durch Einstrahlung eines (virtuellen) Photons mit $E > 2mc^2$ kann man ein Elektron aus dem Dirac-See in einen Zustand positiver Energie anregen:

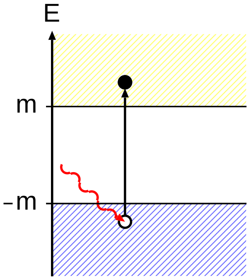
  Erzeugung eines „Teilchens" mit Energie $E_T > 0$ und eines „Lochs" im Dirac-See



- Konsequenz:

  Durch Einstrahlung eines (virtuellen) Photons mit $E > 2mc^2$ kann man ein Elektron aus dem Dirac-See in einen Zustand positiver Energie anregen:

  Erzeugung eines „Teilchens" mit Energie $E_T > 0$ und eines „Lochs" im Dirac-See



- Interpretation der Löcher:

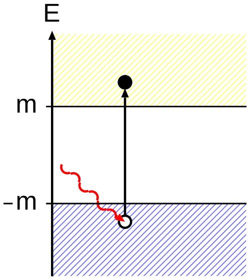
  fehlendes Teilchen mit Energie $E_L < 0$, Impuls $\vec{p}_L$, Spin s_L, Ladung q_L, ...

  = Antiteilchen mit Energie $-E_L > 0$, Impuls $-\vec{p}_L$, Spin $-s_L$, Ladung $-q_L$, ...

- Konsequenz:

  Durch Einstrahlung eines (virtuellen) Photons mit $E > 2mc^2$ kann man ein Elektron aus dem Dirac-See in einen Zustand positiver Energie anregen:

  Erzeugung eines „Teilchens” mit Energie $E_T > 0$ und eines „Lochs” im Dirac-See



- Interpretation der Löcher:

  fehlendes Teilchen mit Energie $E_L < 0$, Impuls $\vec{p}_L$, Spin s_L, Ladung q_L, ...

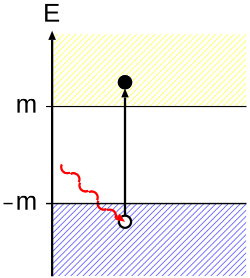
  = Antiteilchen mit Energie $-E_L > 0$, Impuls $-\vec{p}_L$, Spin $-s_L$, Ladung $-q_L$, ...

  $\rightarrow$ Paarerzeugung: $\gamma^* \rightarrow e^+ e^-$

- Konsequenz:

  Durch Einstrahlung eines (virtuellen) Photons mit $E > 2mc^2$ kann man ein Elektron aus dem Dirac-See in einen Zustand positiver Energie anregen:

  Erzeugung eines „Teilchens" mit Energie $E_T > 0$ und eines „Lochs" im Dirac-See



- Interpretation der Löcher:

  fehlendes Teilchen mit Energie $E_L < 0$, Impuls $\vec{p}_L$, Spin s_L, Ladung q_L, ...

  = Antiteilchen mit Energie $-E_L > 0$, Impuls $-\vec{p}_L$, Spin $-s_L$, Ladung $-q_L$, ...

  $\rightarrow$ Paarerzeugung: $\gamma^* \rightarrow e^+ e^-$

- Umkehrprozess: $e^+ e^- \rightarrow \gamma^*$ (Paarvernichtung)

  Teilchen fällt unter Emission eines virtuellen Photons in ein Loch zurück.

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.

Diskussion

- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.
- Probleme:
  - Die Löchertheorie funktioniert nicht für Bosonen.

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.

- Probleme:
  - Die Löchertheorie funktioniert nicht für Bosonen.
  - Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-)Vielteilchentheorie.

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.

- Probleme:
  - Die Löchertheorie funktioniert nicht für Bosonen.
  - Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-)Vielteilchentheorie.

- Löchertheorie aus moderner Sicht:
  - Das Boson-Problem wird im Rahmen der QFT gelöst, die auch auch die Löchertheorie für Fermionen überflüssig macht.

Diskussion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.

- Probleme:
  - Die Löchertheorie funktioniert nicht für Bosonen.
  - Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-)Vielteilchentheorie.

- Löchertheorie aus moderner Sicht:
  - Das Boson-Problem wird im Rahmen der QFT gelöst, die auch auch die Löchertheorie für Fermionen überflüssig macht.
  - Allerdings hat das Vakuum der QFT gewisse Ähnlichkeiten mit dem Dirac-See: Die QFT erweitert dieses Konzept auf eine Weise, die auch für Bosonen funktioniert.

Diskussion

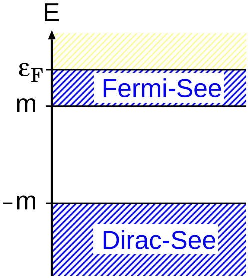
- spektakulärster Erfolg:

  Basierend auf diesen Überlegungen hat Dirac das Positron vorhergesagt, bevor es 1932 von Anderson entdeckt wurde.
- Probleme:
  - Die Löchertheorie funktioniert nicht für Bosonen.
  - Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-)Vielteilchentheorie.
- Löchertheorie aus moderner Sicht:
  - Das Boson-Problem wird im Rahmen der QFT gelöst, die auch auch die Löchertheorie für Fermionen überflüssig macht.
  - Allerdings hat das Vakuum der QFT gewisse Ähnlichkeiten mit dem Dirac-See: Die QFT erweitert dieses Konzept auf eine Weise, die auch für Bosonen funktioniert.
  - Das ∞-Vielteilchenproblem bleibt bestehen.

Fermi-See

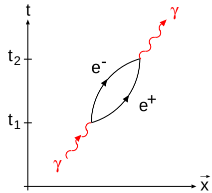
- Das Konzept der Löchertheorie findet bis heute Anwendung in der Vielteilchentheorie, z.B. in der Festkörperphysik oder in der Kernphysik.

  Hier betrachtet man Teilchen-Loch-Anregungen im Fermi-See, während der Dirac-See meist vernachlässigt wird.



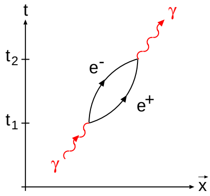
Interpretation von Feynman und Stückelberg

- Betrachte folgenden Prozess:
  - e^+e^--Paarvernichtung zur Zeit t_2
  - e^+e^--Paarerzeugung zur Zeit t_1



Interpretation von Feynman und Stückelberg

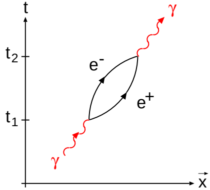
- Betrachte folgenden Prozess:
  - e^+e^--Paarvernichtung zur Zeit t_2
  - e^+e^--Paarerzeugung zur Zeit t_1
- Löchertheorie:
  - e^+ = fehlendes e^- negativer Energie



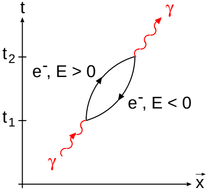
Interpretation von Feynman und Stückelberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Betrachte folgenden Prozess:
  - e^+e^--Paarvernichtung zur Zeit t_2
  - e^+e^--Paarerzeugung zur Zeit t_1

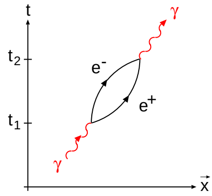


- Löchertheorie:
  - e^+ = fehlendes e^- negativer Energie
  - Erzeugung eines e^+ = Vernichtung eines e^- negativer Energie
  - Vernichtung eines e^+ = Erzeugung eines e^- negativer Energie

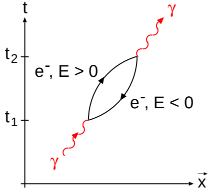


Interpretation von Feynman und Stückelberg

- Betrachte folgenden Prozess:
  - e^+e^--Paarvernichtung zur Zeit t_2
  - e^+e^--Paarerzeugung zur Zeit t_1



- Löchertheorie:
  - e^+ = fehlendes e^- negativer Energie
  - Erzeugung eines e^+ = Vernichtung eines e^- negativer Energie
  - Vernichtung eines e^+ = Erzeugung eines e^- negativer Energie

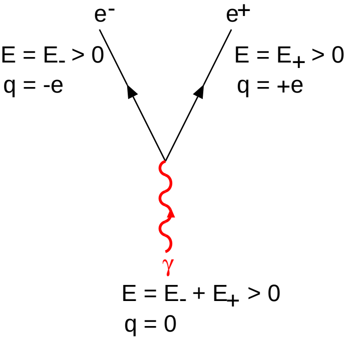


$\rightarrow$ Das e^- negativer Energie breitet sich rückwärts in der Zeit aus!

Paarerzeugung im Detail

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

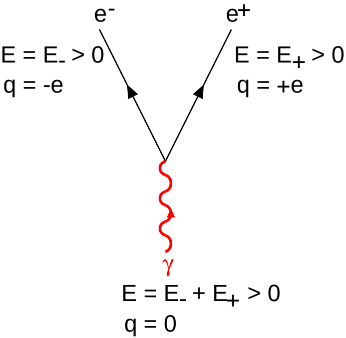
Physikalischer Prozess:



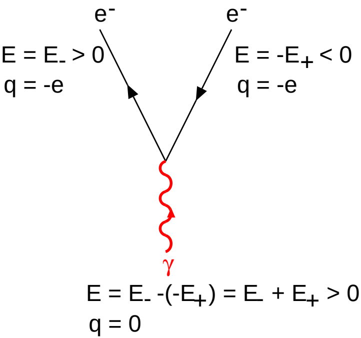
Paarerzeugung im Detail

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Physikalischer Prozess:



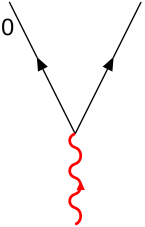
Feynman & Stückelberg:



Paarerzeugung im Detail

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Physikalischer Prozess:



e^- e^+

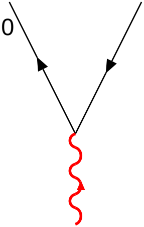
$E = E_- > 0$
$q = -e$

$E = E_+ > 0$
$q = +e$

γ

$E = E_- + E_+ > 0$
$q = 0$

Feynman & Stückelberg:



e^- e^-

$E = E_- > 0$
$q = -e$

$E = -E_+ < 0$
$q = -e$

γ

$E = E_- -(-E_+) = E_- + E_+ > 0$
$q = 0$

Energie- und Ladungsbilanz stimmen!

- Erhebung zum allgemeinen Prinzip:

  Teilchen positiver Energie bewegen sich vorwärts,
  Teilchen negativer Energie rückwärts in der Zeit.
  Letztere entsprechen Antiteilchen positiver Energie,
  die sich vorwärts in der Zeit bewegen.

- Erhebung zum allgemeinen Prinzip:

  Teilchen positiver Energie bewegen sich vorwärts,
  Teilchen negativer Energie rückwärts in der Zeit.
  Letztere entsprechen Antiteilchen positiver Energie,
  die sich vorwärts in der Zeit bewegen.

- lässt sich durch geeignete Randbedingungen in den Streugleichungen erreichen (ähnlich wie Beschränkung auf „retardierte” Lösungen in der Elektrodynamik, s. auch nächstes Kapitel „Streutheorie”.)

- Erhebung zum allgemeinen Prinzip:

  Teilchen positiver Energie bewegen sich vorwärts,
  Teilchen negativer Energie rückwärts in der Zeit.
  Letztere entsprechen Antiteilchen positiver Energie,
  die sich vorwärts in der Zeit bewegen.

- lässt sich durch geeignete Randbedingungen in den Streugleichungen erreichen (ähnlich wie Beschränkung auf „retardierte” Lösungen in der Elektrodynamik, s. auch nächstes Kapitel „Streutheorie”.)

- funktioniert auch für Bosonen!