Berechnung von δ_ℓ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berechnung von δ_ℓ

- „harte Kugel" (umgekehrter unendlicher sphärischer Potenzialtopf):

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{"} \quad r > R \end{cases}$$

Berechnung von δ_ℓ

- „harte Kugel” (umgekehrter unendlicher sphärischer Potenzialtopf):

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad r \le R \\ 0 & \text{”} \quad r > R \end{cases}$$

$\rightarrow$ $u_\ell(r > R) = C_\ell \big(\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr) \big)$

$u_\ell(r \le R) = 0$

Berechnung von δ_ℓ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „harte Kugel" (umgekehrter unendlicher sphärischer Potenzialtopf):

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{"} \quad r > R \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad u_\ell(r > R) = C_\ell \Big(\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr) \Big)$$

$$u_\ell(r \leq R) = 0$$

- Anschlussbedingung: Stetigkeit bei $r = R$

$$\Rightarrow \quad \cos\delta_\ell F_\ell(kR) - \sin\delta_\ell G_\ell(kR) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\delta_\ell = \frac{F_\ell(kR)}{G_\ell(kR)} = \frac{j_\ell(kR)}{n_\ell(kR)}$$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow \; L^{\text{klass}}_{\text{max}} \ll \hbar)$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow \; L_{\text{max}}^{\text{klass}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{array}{lcl} j_\ell(kR) & \propto & (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) & \propto & (kR)^{-(\ell+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow \; L_{\text{max}}^{\text{klass}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{array}{lcl} j_\ell(kR) & \propto & (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) & \propto & (kR)^{-(\ell+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\ell = \tfrac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \propto E^{2\ell}$$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow \; L_{\text{max}}^{\text{klass}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{array}{lcl} j_\ell(kR) & \propto & (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) & \propto & (kR)^{-(\ell+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \quad \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \propto E^{2\ell}$ $\quad \longrightarrow$ schnelle Konvergenz, $\ell = 0$ dominiert

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow \; L_{\max}^{\text{klass}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{aligned} j_\ell(kR) &\propto (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) &\propto (kR)^{-(\ell+1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \propto E^{2\ell}$$ → schnelle Konvergenz, $\ell = 0$ dominiert

- $\ell = 0$:

$$\tan\delta_0 = \frac{j_0(kR)}{n_0(kR)} = -\tan(kR) \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = -kR$$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow\ L^{\text{klass}}_{\text{max}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{array}{lcl} j_\ell(kR) & \propto & (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) & \propto & (kR)^{-(\ell+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_\ell = \tfrac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \propto E^{2\ell}$$ → schnelle Konvergenz, $\ell = 0$ dominiert

- $\ell = 0$:

$$\tan\delta_0 = \tfrac{j_0(kR)}{n_0(kR)} = -\tan(kR) \quad \Rightarrow\ \delta_0 = -kR$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_0 = \tfrac{4\pi}{k^2}\,\sin^2(kR)$$

- kleine Energien: $kR \ll 1 \quad (\Leftrightarrow\ L^{\text{klass}}_{\text{max}} \ll \hbar)$

$$\left.\begin{array}{lcl} j_\ell(kR) & \propto & (kR)^\ell \\ n_\ell(kR) & \propto & (kR)^{-(\ell+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto (kR)^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_\ell = \tfrac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\,\sin^2\delta_\ell \propto E^{2\ell}$$ ➞ schnelle Konvergenz, $\ell = 0$ dominiert

- $\ell = 0$:

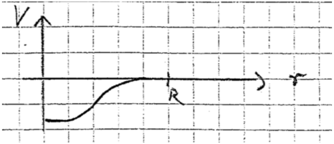
$$\tan\delta_0 = \tfrac{j_0(kR)}{n_0(kR)} = -\tan(kR) \quad \Rightarrow\ \delta_0 = -kR$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_0 = \tfrac{4\pi}{k^2}\,\sin^2(kR)$$

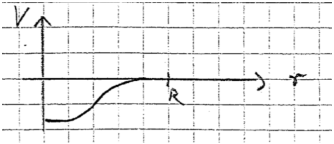
$$\Rightarrow\quad \sigma(E\to 0) = \sigma_0(E\to 0) = \lim_{k\to 0} 4\pi\,\frac{\sin^2(kR)}{k^2} = 4\pi\,R^2$$

Der quantenmechanische WQ bei niedrigen Energien ist viermal so groß wie der geometrische WQ ($\hat{=}$ Strahlenoptik $\hat{=}$ Hochenergielimes)!

- beliebiges Potenzial (lokalisiert: $V(r \geq R) = 0$)



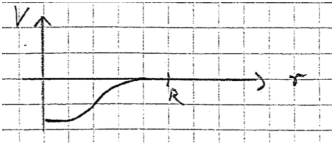
- beliebiges Potenzial (lokalisiert: $V(r \geq R) = 0$)



- $\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r \leq R) = 0$

  muss i.A. numerisch gelöst werden

- beliebiges Potenzial (lokalisiert: $V(r \geq R) = 0$)

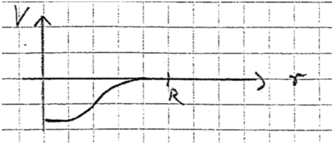


- $\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r \leq R) = 0$

  muss i.A. numerisch gelöst werden

- $u_\ell(r \geq R) = C_\ell\left(\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\right)$

- beliebiges Potenzial (lokalisiert: $V(r \geq R) = 0$)



- $\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2\right) u_\ell(r \leq R) = 0$

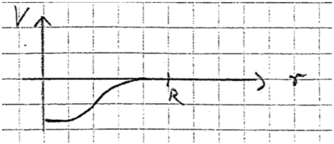
  muss i.A. numerisch gelöst werden

- $u_\ell(r \geq R) = C_\ell\big(\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)\big)$

- stetiger Anschluss der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $r = R$:

  → „logarithmische Ableitung": $\left.\frac{u'_\ell(r\leq R)}{u_\ell(r\leq R)}\right|_{r=R} = \left.\frac{\cos\delta_\ell \frac{d}{dr}F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell \frac{d}{dr}G_\ell(kr)}{\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)}\right|_{r=R}$

- beliebiges Potenzial (lokalisiert: $V(r \geq R) = 0$)



- $\left(\frac{d^2}{dr^2} - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right) u_\ell(r \leq R) = 0$
  muss i.A. numerisch gelöst werden
- $u_\ell(r \geq R) = C_\ell \big(\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr) \big)$

- stetiger Anschluss der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $r = R$:

  $\rightarrow$ „logarithmische Ableitung": $\left.\frac{u'_\ell(r \leq R)}{u_\ell(r \leq R)}\right|_{r=R} = \left.\frac{\cos\delta_\ell \frac{d}{dr} F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell \frac{d}{dr} G_\ell(kr)}{\cos\delta_\ell F_\ell(kr) - \sin\delta_\ell G_\ell(kr)}\right|_{r=R}$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\delta_\ell = \left.\frac{\frac{d}{dr} F_\ell(kr) - F_\ell(kr) \frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}{\frac{d}{dr} G_\ell(kr) - G_\ell(kr) \frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}\right|_{r=R}$$

- $\tan\delta_\ell = \left.\frac{\frac{d}{dr}F_\ell(kr) - F_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}{\frac{d}{dr}G_\ell(kr) - G_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}\right|_{r=R}, \qquad F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr), \quad G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$
- kleine Energien: $kR \ll 1$

$$j_\ell(kR) \propto (kR)^\ell \quad \Rightarrow \quad F_\ell(kr) \propto (kR)^{\ell+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}F_\ell(kr) \propto k\,(kR)^\ell$$
$$n_\ell(kR) \propto (kR)^{-(\ell+1)} \quad \Rightarrow \quad G_\ell(kr) \propto (kR)^{-\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}G_\ell(kr) \propto k\,(kR)^{-(\ell+1)}$$

- $\tan\delta_\ell = \left.\dfrac{\frac{d}{dr}F_\ell(kr) - F_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}{\frac{d}{dr}G_\ell(kr) - G_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}\right|_{r=R}$, $\quad F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr), \quad G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$
- kleine Energien: $kR \ll 1$

$$j_\ell(kR) \propto (kR)^\ell \quad \Rightarrow \quad F_\ell(kr) \propto (kR)^{\ell+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}F_\ell(kr) \propto k\,(kR)^\ell$$
$$n_\ell(kR) \propto (kR)^{-(\ell+1)} \quad \Rightarrow \quad G_\ell(kr) \propto (kR)^{-\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}G_\ell(kr) \propto k\,(kR)^{-(\ell+1)}$$

→ „natürliches” Verhalten: $\quad \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto k^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$

(wie bei der harten Kugel)

- $\tan\delta_\ell = \left.\dfrac{\frac{d}{dr}F_\ell(kr) - F_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}{\frac{d}{dr}G_\ell(kr) - G_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}\right|_{r=R}, \qquad F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr), \quad G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$
- kleine Energien: $kR \ll 1$

$$j_\ell(kR) \propto (kR)^\ell \quad \Rightarrow \quad F_\ell(kr) \propto (kR)^{\ell+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}F_\ell(kr) \propto k\,(kR)^\ell$$
$$n_\ell(kR) \propto (kR)^{-(\ell+1)} \quad \Rightarrow \quad G_\ell(kr) \propto (kR)^{-\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}G_\ell(kr) \propto k\,(kR)^{-(\ell+1)}$$

$\longrightarrow$ „natürliches" Verhalten: $\delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto k^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$

(wie bei der harten Kugel)

- „Streulänge": $a \equiv -\lim\limits_{k\to 0}\frac{\delta_0}{k}$

- $\tan\delta_\ell = \left.\dfrac{\frac{d}{dr}F_\ell(kr) - F_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}{\frac{d}{dr}G_\ell(kr) - G_\ell(kr)\frac{u'_\ell(r)}{u_\ell(r)}}\right|_{r=R}$, $\quad F_\ell(kr) = kr\, j_\ell(kr), \quad G_\ell(kr) = kr\, n_\ell(kr)$
- kleine Energien: $\quad kR \ll 1$

$$j_\ell(kR) \propto (kR)^\ell \quad \Rightarrow \quad F_\ell(kr) \propto (kR)^{\ell+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}F_\ell(kr) \propto k\,(kR)^\ell$$
$$n_\ell(kR) \propto (kR)^{-(\ell+1)} \quad \Rightarrow \quad G_\ell(kr) \propto (kR)^{-\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}G_\ell(kr) \propto k\,(kR)^{-(\ell+1)}$$

→ „natürliches” Verhalten: $\quad \delta_\ell \approx \sin\delta_\ell \approx \tan\delta_\ell \propto k^{2\ell+1} \propto E^{\ell+\frac{1}{2}}$

(wie bei der harten Kugel)

- „Streulänge”: $\quad a \equiv -\lim_{k\to 0}\frac{\delta_0}{k}$
  - harte Kugel: $\quad a = R$

    → Streulänge = Radius einer harten Kugel mit dem gleichen Niederenergieverhalten

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

- Legendre-Polynome: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad ...$

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

- Legendre-Polynome: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad ...$

$$\Rightarrow \; f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta) = f_0 + f_1 \, \cos\theta + ...$$

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Legendre-Polynome: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad ...$

$$\Rightarrow \; f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta) = f_0 + f_1 \, \cos\theta + ...$$

- differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f_k(\theta)|^2 = |f_0|^2 + 2\mathrm{Re}\, f_0^* f_1 \, \cos\theta + ...$$

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

- Legendre-Polynome: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad ...$

$$\Rightarrow \; f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta) = f_0 + f_1 \, \cos\theta + ...$$

- differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \left|f_k(\theta)\right|^2 = \left|f_0\right|^2 + 2\mathrm{Re}\, f_0^* f_1 \, \cos\theta + ...$$

→ Prinzipiell: Bestimmung der f_ℓ (und damit δ_ℓ) aus der Winkelverteilung

Experimentelle Bestimmung der Streuphasen (Prinzip)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Legendre-Polynome: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad ...$

  $$\Rightarrow \; f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell \, P_\ell(\cos\theta) = f_0 + f_1 \cos\theta + ...$$

- differenzieller Wirkungsquerschnitt:

  $$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f_k(\theta)|^2 = |f_0|^2 + 2\mathrm{Re}\, f_0^* f_1 \cos\theta + ...$$

→ Prinzipiell: Bestimmung der f_ℓ (und damit δ_ℓ) aus der Winkelverteilung

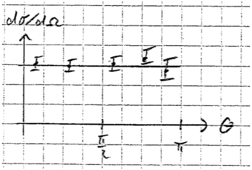
Praxis: nicht immer eindeutig auf Grund von Messunsicherheiten

- $f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} \sin \delta_\ell e^{i\delta_\ell}$

- kleine Energien (nur $\ell = 0$ relevant):

  $f_k(\theta) \approx f_0 = \frac{1}{k} \sin \delta_0 e^{i\delta_0}$

  $\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad$ (isotrope Streuung)

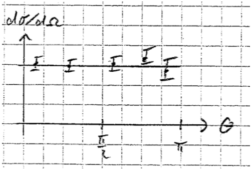


- $f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell e^{i\delta_\ell}$

- kleine Energien (nur $\ell = 0$ relevant):

  $f_k(\theta) \approx f_0 = \frac{1}{k} \sin\delta_0 e^{i\delta_0}$

  $\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{k^2} \sin^2\delta_0$ (isotrope Streuung)



- etwas größere Energien:

  $f_k(\theta) \approx f_0 + f_1 \cos\theta = \frac{1}{k} \sin\delta_0 e^{i\delta_0} + \frac{3}{k} \sin\delta_1 e^{i\delta_1}\, cos\theta$

  $\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{k^2} \Big(A + B\cos\theta\Big), \qquad A = \sin^2\delta_0,$

  $B = 6\sin\delta_0 \sin\delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1)$

3.8 Streuung mit inelastischen Kanälen

3.8 Streuung mit inelastischen Kanälen

- Wir lassen jetzt innere Anregungen des Targets zu.

→ inelastische Prozesse: $E' = E - \Delta E < E$

  - E: Energie des einlaufenden Teilchens
  - E': Energie des gestreuten Teilchens
  - ΔE: Anregungsenergie des Targets (alles im CMS)

3.8 Streuung mit inelastischen Kanälen

- Wir lassen jetzt innere Anregungen des Targets zu.

→ inelastische Prozesse: $E' = E - \Delta E < E$

  - E: Energie des einlaufenden Teilchens
  - E': Energie des gestreuten Teilchens
  - ΔE: Anregungsenergie des Targets (alles im CMS)

- weitere Möglichkeiten:
  - Das Projektil wird vom Target absorbiert.
  - Das Projektil wird in ein anderes Teilchen umgewandelt, z.B. $e^- p \to \nu_e\, n$

3.8 Streuung mit inelastischen Kanälen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wir lassen jetzt innere Anregungen des Targets zu.

→ inelastische Prozesse: $E' = E - \Delta E < E$

  - E: Energie des einlaufenden Teilchens
  - E': Energie des gestreuten Teilchens
  - ΔE: Anregungsenergie des Targets (alles im CMS)

- weitere Möglichkeiten:
  - Das Projektil wird vom Target absorbiert.
  - Das Projektil wird in ein anderes Teilchen umgewandelt,
    z.B. $e^- p \to \nu_e n$

- in allen diesen Fällen:

  Reduktion des auslaufenden Teilchenstroms im elastischen Kanal ($E' = E$)

- elastische Streuung: $u_\ell(r \to \infty) \propto e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$

auslaufende einlaufende Kugelwellen

reelle Streuphase δ_ℓ im Einklang mit dem optischen Theorem

$\Rightarrow$ Teilchenzahl erhalten

- elastische Streuung: $u_\ell(r \to \infty) \propto e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$

  auslaufende einlaufende Kugelwellen

  reelle Streuphase δ_ℓ im Einklang mit dem optischen Theorem

  $\Rightarrow$ Teilchenzahl erhalten

- Anwesenheit inelastischer Kanäle

  ➞ weniger auslaufende Teilchen im elastischen Kanal:

  $$u_\ell^{\mathrm{el}}(r \to \infty) \propto \eta_\ell \, e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}, \qquad 0 \le \eta_\ell \le 1$$

  „Inelastizität"

- elastische Streuung: $u_\ell(r \to \infty) \propto e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$

  auslaufende einlaufende Kugelwellen

  reelle Streuphase δ_ℓ im Einklang mit dem optischen Theorem

  $\Rightarrow$ Teilchenzahl erhalten

- Anwesenheit inelastischer Kanäle

  ➞ weniger auslaufende Teilchen im elastischen Kanal:

  $$u_\ell^{\text{el}}(r \to \infty) \propto \eta_\ell \, e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}, \qquad 0 \le \eta_\ell \le 1$$

  „Inelastizität"

  - eigentlich das falsche Wort: $\eta_\ell = 1$ entspricht elastischer Streuung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wellenfunktion: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\mathrm{el}}(\vec{r}) + \psi_{\mathrm{inel}}(\vec{r}) = \sum_{\ell} \frac{u_\ell^{\mathrm{el}}(r)}{r} P_\ell(\cos\theta) + \psi_{\mathrm{inel}}(\vec{r})$

- Wellenfunktion: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\mathrm{el}}(\vec{r}) + \psi_{\mathrm{inel}}(\vec{r}) = \sum_\ell \frac{u_\ell^{\mathrm{el}}(r)}{r} P_\ell(\cos\theta) + \psi_{\mathrm{inel}}(\vec{r})$

- asymptotisches Verhalten:

$$u_\ell^{\mathrm{el}}(r \to \infty) \propto \eta_\ell \, e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$$

$$\psi_{\mathrm{el}}(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{ikz} + f_k^{\mathrm{el}}(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad f_k^{\mathrm{el}}(\theta) = \sum_\ell f_\ell^{\mathrm{el}} P_\ell(\cos\theta)$$

- Wellenfunktion: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\text{el}}(\vec{r}) + \psi_{\text{inel}}(\vec{r}) = \sum_\ell \frac{u_\ell^{\text{el}}(r)}{r} P_\ell(\cos\theta) + \psi_{\text{inel}}(\vec{r})$
- asymptotisches Verhalten:

$$u_\ell^{\text{el}}(r \to \infty) \propto \eta_\ell \, e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}$$

$$\psi_{\text{el}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f_k^{\text{el}}(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad f_k^{\text{el}}(\theta) = \sum_\ell f_\ell^{\text{el}} P_\ell(\cos\theta)$$

- Analoges Vorgehen zum rein elastischen Fall (Entwicklung der ebenen Welle)

$$\rightarrow \quad \boxed{f_\ell^{\text{el}} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell \, e^{2i\delta_\ell} - 1\right)}$$

- Wellenfunktion: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\text{el}}(\vec{r}) + \psi_{\text{inel}}(\vec{r}) = \sum_\ell \frac{u_\ell^{\text{el}}(r)}{r} P_\ell(\cos\theta) + \psi_{\text{inel}}(\vec{r})$

- asymptotisches Verhalten:

$$u_\ell^{\text{el}}(r \to \infty) \propto \eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} e^{i(kr - \ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell\frac{\pi}{2})}$$

$$\psi_{\text{el}}(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{ikz} + f_k^{\text{el}}(\theta)\, \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad f_k^{\text{el}}(\theta) = \sum_\ell f_\ell^{\text{el}}\, P_\ell(\cos\theta)$$

- Analoges Vorgehen zum rein elastischen Fall (Entwicklung der ebenen Welle)

$$\rightarrow \quad \boxed{f_\ell^{\text{el}} = \frac{2\ell+1}{2ik}\left(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right)}$$

- elastischer Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{el}} = \int d\Omega\, |f_k^{\text{el}}(\theta)|^2$

$$\rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{el}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1) \left|\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1\right|^2}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$

  Weiterhin: Teilchen, die elastisch oder inelastisch gestreut, absorbiert oder umgewandelt werden, fehlen in Vorwärtsrichtung bei elastischen Energien.

  $\longrightarrow$ optisches Theorem: $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \text{Im} \, f_k^{\text{el}}(0)$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$

  Weiterhin: Teilchen, die elastisch oder inelastisch gestreut, absorbiert oder umgewandelt werden, fehlen in Vorwärtsrichtung bei elastischen Energien.

  $\longrightarrow$ optisches Theorem: $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \, \text{Im}\, f_k^{\text{el}}(0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1)\,(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell)}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$

  Weiterhin: Teilchen, die elastisch oder inelastisch gestreut, absorbiert oder umgewandelt werden, fehlen in Vorwärtsrichtung bei elastischen Energien.

  $\longrightarrow$ optisches Theorem: $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_k^{\text{el}}(0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1)\,(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell)}$$

- inelastischer Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{inel}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{inel}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1) \left\{ 2\,(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell) - (\eta_\ell\, e^{-2i\delta_\ell} - 1)(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1) \right\}$$

- totaler Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$

  Weiterhin: Teilchen, die elastisch oder inelastisch gestreut, absorbiert oder umgewandelt werden, fehlen in Vorwärtsrichtung bei elastischen Energien.

  $\longrightarrow$ optisches Theorem: $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f_k^{\text{el}}(0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1)\,(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell)}$$

- inelastischer Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{inel}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\text{inel}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1) \left\{ 2\,(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell) - (\eta_\ell\, e^{-2i\delta_\ell} - 1)(\eta_\ell\, e^{2i\delta_\ell} - 1) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{inel}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell + 1)\big(1 - \eta_\ell^2\big)}$$ (unabhängig von δ_ℓ)

3.9 Resonanzen

3.9 Resonanzen

- totaler WQ: $\sigma_{\text{tot}}(E) = \sum_\ell \sigma_\ell(E), \quad \sigma_\ell(E) = \frac{2\pi}{k^2}\,(2\ell+1)\big(1 - \eta_\ell(E)\,\cos 2\delta_\ell(E)\big)$

3.9 Resonanzen

- totaler WQ: $\sigma_{\text{tot}}(E) = \sum_\ell \sigma_\ell(E), \quad \sigma_\ell(E) = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)\big(1 - \eta_\ell(E)\cos 2\delta_\ell(E)\big)$

$\Rightarrow$ Für $\eta_\ell(E) \approx$ *const*. wird $\sigma_\ell(E)$ maximal, wenn $\delta_\ell(E) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$
(stimmt nicht ganz wegen des Faktors $\frac{1}{k^2}$)

3.9 Resonanzen

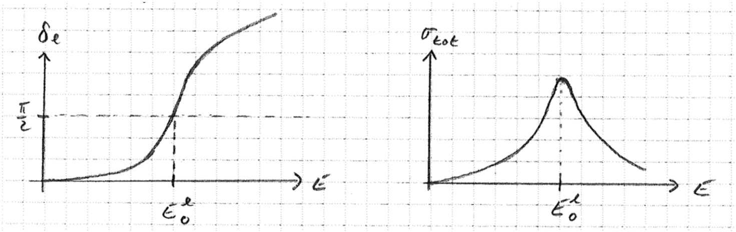
- totaler WQ: $\sigma_{\text{tot}}(E) = \sum_\ell \sigma_\ell(E), \quad \sigma_\ell(E) = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)\big(1 - \eta_\ell(E)\cos 2\delta_\ell(E)\big)$

$\Rightarrow$ Für $\eta_\ell(E) \approx$ *const*. wird $\sigma_\ell(E)$ maximal, wenn $\delta_\ell(E) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$

(stimmt nicht ganz wegen des Faktors $\frac{1}{k^2}$)

$\Rightarrow$ schneller Durchgang von $\delta_\ell(E)$ durch $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ scharfes Maximum von $\sigma_\ell(E)$ („Resonanz"), das oft auch $\sigma_{\text{tot}}(E)$ dominiert:



Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)}$

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell - i}$

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell - i}$
- Resonanz: $\delta_\ell(E_0^\ell) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$

  $\Rightarrow f_\ell(E_0^\ell) = \frac{2\ell+1}{k} i$ (rein imaginär)

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell - i}$

- Resonanz: $\delta_\ell(E_0^\ell) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$

  $\Rightarrow \quad f_\ell(E_0^\ell) = \frac{2\ell+1}{k}\, i$ (rein imaginär)

- Taylor-Entwicklung um die Resonanz:

$$\cot\delta_\ell(E) = \cot\delta_\ell(E_0^\ell) + \left.\frac{d\,\cot\delta_\ell(E)}{dE}\right|_{E=E_0^\ell} (E - E_0^\ell) + \ldots$$

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell - i}$
- Resonanz: $\delta_\ell(E_0^\ell) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$

  $\Rightarrow \quad f_\ell(E_0^\ell) = \frac{2\ell+1}{k}\, i$ (rein imaginär)

- Taylor-Entwicklung um die Resonanz:

$$\cot\delta_\ell(E) = \cot\delta_\ell(E_0^\ell) + \left.\frac{d\ \cot\delta_\ell(E)}{dE}\right|_{E=E_0^\ell} (E - E_0^\ell) + \dots$$

  - $\cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$
  - $\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\ \cot\delta_\ell(E)}{dE}\right|_{E=E_0^\ell} = -\frac{1}{\sin^2 E_0^\ell}\, \delta_\ell'(E_0^\ell) = -\delta_\ell'(E_0^\ell)$

Vereinfachung: rein elastische Streuung ($\eta_\ell = 1$)

- $f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k} \sin\delta_\ell(E)\, e^{i\delta_\ell(E)} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{\sin\delta_\ell}{\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell} = \frac{2\ell+1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell - i}$
- Resonanz: $\delta_\ell(E_0^\ell) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$

  $\Rightarrow \quad f_\ell(E_0^\ell) = \frac{2\ell+1}{k} i$ (rein imaginär)
- Taylor-Entwicklung um die Resonanz:

$$\cot\delta_\ell(E) = \cot\delta_\ell(E_0^\ell) + \left.\frac{d\,\cot\delta_\ell(E)}{dE}\right|_{E=E_0^\ell} (E - E_0^\ell) + \dots \quad \approx -\delta_\ell'(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell)$$

  - $\cot\delta_\ell(E_0^\ell) = 0$
  - $\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\,\cot\delta_\ell(E)}{dE}\right|_{E=E_0^\ell} = -\frac{1}{\sin^2 E_0^\ell}\,\delta_\ell'(E_0^\ell) = -\delta_\ell'(E_0^\ell)$

$$\cot\delta_\ell(E) \approx -\delta_\ell'(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell) \quad \Rightarrow \quad f_\ell(E) = \tfrac{2\ell+1}{k}\,\tfrac{1}{\cot\delta_\ell - i} \approx -\tfrac{2\ell+1}{k}\,\tfrac{1}{\delta_\ell'(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell) + i}$$

$$\cot\delta_\ell(E) \approx -\delta_\ell'(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell) \quad \Rightarrow \quad f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k}\frac{1}{\cot\delta_\ell - i} \approx -\frac{2\ell+1}{k}\frac{1}{\delta_\ell'(E_0^\ell)\,(E-E_0^\ell)+\mathrm{i}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_\ell(E \approx E_0^\ell) = -\frac{2\ell+1}{k}\,\frac{\Gamma_\ell/2}{(E - E_0^\ell) + \mathrm{i}\Gamma_\ell/2}} \quad \text{mit} \quad \Gamma_\ell \equiv \frac{2}{\delta_\ell'(E_0^\ell)}$$

„Breit-Wigner-Formel"

$$\cot\delta_\ell(E) \approx -\delta'_\ell(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell) \quad \Rightarrow \quad f_\ell(E) = \tfrac{2\ell+1}{k}\,\tfrac{1}{\cot\delta_\ell - i} \approx -\tfrac{2\ell+1}{k}\,\tfrac{1}{\delta'_\ell(E_0^\ell)\,(E-E_0^\ell)+\mathrm{i}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_\ell(E \approx E_0^\ell) = -\frac{2\ell+1}{k}\,\frac{\Gamma_\ell/2}{(E - E_0^\ell) + \mathrm{i}\Gamma_\ell/2}} \quad \text{mit} \quad \Gamma_\ell \equiv \tfrac{2}{\delta'_\ell(E_0^\ell)}$$

„Breit-Wigner-Formel”

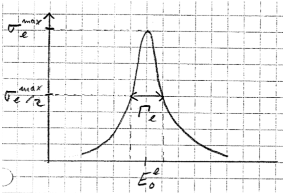
- $\sigma_\ell = \tfrac{4\pi}{2\ell+1}|f_\ell|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_\ell(E) = \frac{4\pi}{k^2}\,(2\ell+1)\,\frac{\Gamma_\ell^2/4}{(E - E_0^\ell)^2 + \Gamma_\ell^2/4}}$

$$\cot\delta_\ell(E) \approx -\delta'_\ell(E_0^\ell)\,(E - E_0^\ell) \quad \Rightarrow \quad f_\ell(E) = \frac{2\ell+1}{k}\,\frac{1}{\cot\delta_\ell - i} \approx -\frac{2\ell+1}{k}\,\frac{1}{\delta'_\ell(E_0^\ell)\,(E-E_0^\ell)+\mathrm{i}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_\ell(E \approx E_0^\ell) = -\frac{2\ell+1}{k}\,\frac{\Gamma_\ell/2}{(E - E_0^\ell) + \mathrm{i}\Gamma_\ell/2}} \quad \text{mit} \quad \Gamma_\ell \equiv \frac{2}{\delta'_\ell(E_0^\ell)}$$

„Breit-Wigner-Formel"

- $\sigma_\ell = \frac{4\pi}{2\ell+1}|f_\ell|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_\ell(E) = \frac{4\pi}{k^2}\,(2\ell+1)\,\frac{\Gamma_\ell^2/4}{(E - E_0^\ell)^2 + \Gamma_\ell^2/4}}$



- $\sigma_\ell(E_0^\ell) = \frac{4\pi}{k^2}\,(2\ell+1) \equiv \sigma_\ell^{\mathrm{max}}$
- $\sigma_\ell(E_0^\ell \pm \frac{\Gamma_\ell}{2}) = \sigma_\ell^{\mathrm{max}}/2$