Bogoliubov-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz für neue Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren:

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\, a^\dagger_{-\vec{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\dagger_{\vec{k}} = u^*_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{k}} - v^*_{\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}$$

Bogoliubov-Transformation

- Ansatz für neue Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren:

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\, a^\dagger_{-\vec{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\dagger_{\vec{k}} = u^*_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{k}} - v^*_{\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}$$

  - vernichten bzw. erzeugen „Quasiteilchen" mit Impuls $\vec{k}$

    = Superposition eines Teilchens und eines „Lochs" mit Impuls $\vec{k}$
    (Loch = fehlendes Teilchen mit Impuls $-\vec{k}$, vgl. Löchertheorie).

Bogoliubov-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz für neue Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren:

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\, a^{\dagger}_{-\vec{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{\dagger}_{\vec{k}} = u^{*}_{\vec{k}}\, a^{\dagger}_{\vec{k}} - v^{*}_{\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}$$

  - vernichten bzw. erzeugen „Quasiteilchen" mit Impuls $\vec{k}$

    = Superposition eines Teilchens und eines „Lochs" mit Impuls $\vec{k}$
    (Loch = fehlendes Teilchen mit Impuls $-\vec{k}$, vgl. Löchertheorie).

- Forderung: $\alpha_{\vec{k}}$ und $\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}$ erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen

  - $\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = \left(|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2\right) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \stackrel{!}{=} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad \Rightarrow \quad |u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2 = 1$

  - $\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}\right] = -\left(u_{\vec{k}} v_{-\vec{k}} - v_{\vec{k}} u_{-\vec{k}}\right) \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \stackrel{!}{=} 0$

    erfüllt für symmetrische Koeffizienten: $u_{\vec{k}} = u_{-\vec{k}}, \;\; v_{\vec{k}} = v_{-\vec{k}}$

Bogoliubov-Transformation

- Ansatz für neue Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren:

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}\, a^\dagger_{-\vec{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\dagger_{\vec{k}} = u^*_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{k}} - v^*_{\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}$$

  - vernichten bzw. erzeugen „Quasiteilchen" mit Impuls $\vec{k}$

    = Superposition eines Teilchens und eines „Lochs" mit Impuls $\vec{k}$
    (Loch = fehlendes Teilchen mit Impuls $-\vec{k}$, vgl. Löchertheorie).

- Forderung: $\alpha_{\vec{k}}$ und $\alpha^\dagger_{\vec{k}}$ erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen

  - $\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \left(|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2\right) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \stackrel{!}{=} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad \Rightarrow \quad |u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2 = 1$
  - $\left[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}\right] = -\left(u_{\vec{k}} v_{-\vec{k}} - v_{\vec{k}} u_{-\vec{k}}\right) \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \stackrel{!}{=} 0$

    erfüllt für symmetrische Koeffizienten: $u_{\vec{k}} = u_{-\vec{k}}, \;\; v_{\vec{k}} = v_{-\vec{k}}$

- weitere Annahme: $u_{\vec{k}}$ und $v_{\vec{k}}$ sind reell.

- Umkehrtransformation:

$$a_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}}\,, \qquad a^{\dagger}_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha_{-\vec{k}}$$

- Umkehrtransformation:

$$a_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{-\vec{k}}\,, \qquad a^\dagger_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha_{-\vec{k}}$$

- Einsetzen in den Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned} H \approx\ & \frac{N^2}{2V}\tilde{V}(\vec{0}) \\ & + \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \Big\{ \Big(\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} + \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\Big)\Big(u^2_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + v^2_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}}\alpha^\dagger_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\,(\alpha^\dagger_{\vec{k}}\alpha^\dagger_{-\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k}})\Big) \\ & \qquad + \frac{N}{2V}\tilde{V}(\vec{k})\Big((u^2_{\vec{k}} + v^2_{\vec{k}})(\alpha^\dagger_{\vec{k}}\alpha^\dagger_{-\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k}}) + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\,(\alpha^\dagger_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^\dagger_{\vec{k}})\Big)\Big\} \end{aligned}$$

- Umkehrtransformation:

$$a_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}}\,, \qquad a^{\dagger}_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}\,\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha_{-\vec{k}}$$

- Einsetzen in den Hamilton-Operator:

$$H \approx \frac{N^2}{2V}\tilde{V}(\vec{0}) + \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \Big\{ \Big(\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} + \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\Big)\Big(u^2_{\vec{k}}\,\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + v^2_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\,(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k}})\Big)$$
$$+ \frac{N}{2V}\tilde{V}(\vec{k})\Big((u^2_{\vec{k}} + v^2_{\vec{k}})(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k}}) + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\,(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}})\Big)\Big\}$$

- Damit die Nichtdiagonalelemente verschwinden, muss gelten:

$$\underbrace{\Big(\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} + \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\Big)}_{A} u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} + \underbrace{\frac{N}{2V}\tilde{V}(\vec{k})}_{B}(u^2_{\vec{k}} + v^2_{\vec{k}}) \overset{!}{=} 0$$

$$A\,uv + B(u^2 + v^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2\,u^2 v^2 = B^2(u^2 + v^2)^2$$

$$A\,uv \;+\; B(u^2+v^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad A^2\,u^2 v^2 \;=\; B^2(u^2+v^2)^2$$

- Wir hatten $u^2 - v^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad u^2 = v^2 + 1$

$$A\,uv \;+\; B(u^2+v^2)=0 \quad\Rightarrow\quad A^2\,u^2v^2 \;=\; B^2(u^2+v^2)^2$$

- Wir hatten $\;u^2-v^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad u^2=v^2+1$

$$\Rightarrow\; A^2\,(v^4+v^2) \;=\; B^2(2v^2+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad v^4+v^2=\tfrac{B^2}{A^2-4B^2}$$

- Annahme: repulsives Potenzial $\;\tilde{V}(\vec{k})>0$

  $\Rightarrow\; A,B>0,\;\; A^2>4B^2$

$$A\,uv + B(u^2+v^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2\,u^2v^2 = B^2(u^2+v^2)^2$$

- Wir hatten $u^2 - v^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = v^2 + 1$

$$\Rightarrow \; A^2\,(v^4+v^2) = B^2(2v^2+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^4 + v^2 = \frac{B^2}{A^2-4B^2}$$

- Annahme: repulsives Potenzial $\tilde{V}(\vec{k}) > 0$

  $\Rightarrow \; A, B > 0, \quad A^2 > 4B^2$

$$\longrightarrow \; v^2 = \frac{1}{2}\frac{A-\sqrt{A^2-4B^2}}{\sqrt{A^2-4B^2}} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{1}{2}\frac{A+\sqrt{A^2-4B^2}}{\sqrt{A^2-4B^2}}, \quad uv = \frac{-B}{\sqrt{A^2-4B^2}}$$

$$A\,uv + B(u^2+v^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2\,u^2v^2 = B^2(u^2+v^2)^2$$

- Wir hatten $u^2 - v^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = v^2 + 1$

$\Rightarrow$ $A^2\,(v^4+v^2) = B^2(2v^2+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^4 + v^2 = \frac{B^2}{A^2-4B^2}$

- Annahme: repulsives Potenzial $\tilde{V}(\vec{k}) > 0$

  $\Rightarrow A, B > 0, \quad A^2 > 4B^2$

$\rightarrow$ $v^2 = \frac{1}{2}\frac{A-\sqrt{A^2-4B^2}}{\sqrt{A^2-4B^2}} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{1}{2}\frac{A+\sqrt{A^2-4B^2}}{\sqrt{A^2-4B^2}}, \quad uv = \frac{-B}{\sqrt{A^2-4B^2}}$

(nichtwechselwirkender Grenzfall: $\tilde{V} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow v = 0, \quad u^2 = 1 \quad \checkmark$)

- Einsetzen in den Hamilton-Operator liefert schließlich:

$$H \approx \underbrace{\frac{N^2}{2V}\tilde{V}(\vec{0}) + \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \frac{1}{2}\left(\hbar\omega_{\vec{k}} - \frac{\hbar^2 \vec{k}^{\,2}}{2m} - \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\right)}_{\text{Grundzustandsenergie (= konstante Zahl)}} + \underbrace{\sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \hbar\omega_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{\vec{k}}\, \alpha_{\vec{k}}}_{\text{Quasiteilchenanregungen}}$$

  - Quasiteilchenenergie („Dispersionsrelation"):

$$\hbar\omega_{\vec{k}} = \sqrt{A - 4B} = \hbar|\vec{k}|\sqrt{\frac{N}{mV}\tilde{V}(\vec{k}) + \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{4m^2}} \qquad \text{(für } |\vec{k}| \to 0 \text{ linear in } |\vec{k}|\text{)}$$

- Einsetzen in den Hamilton-Operator liefert schließlich:

$$H \approx \underbrace{\frac{N^2}{2V}\tilde{V}(\vec{0}) + \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \frac{1}{2}\left(\hbar\omega_{\vec{k}} - \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2m} - \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\right)}_{\text{Grundzustandsenergie (= konstante Zahl)}} + \underbrace{\sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \hbar\omega_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}}}_{\text{Quasiteilchenanregungen}}$$

  - Quasiteilchenenergie („Dispersionsrelation”):

$$\hbar\omega_{\vec{k}} = \sqrt{A - 4B} = \hbar|\vec{k}|\sqrt{\frac{N}{mV}\tilde{V}(\vec{k}) + \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{4m^2}} \qquad \text{(für } |\vec{k}| \to 0 \text{ linear in } |\vec{k}|\text{)}$$

→ Die Quasiteilchen liefern positive Beiträge zur Energie.

- Einsetzen in den Hamilton-Operator liefert schließlich:

$$H \approx \underbrace{\frac{N^2}{2V}\tilde{V}(\vec{0}) + \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \frac{1}{2}\left(\hbar\omega_{\vec{k}} - \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2m} - \frac{N}{V}\tilde{V}(\vec{k})\right)}_{\text{Grundzustandsenergie (= konstante Zahl)}} + \underbrace{\sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \hbar\omega_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{\vec{k}}\, \alpha_{\vec{k}}}_{\text{Quasiteilchenanregungen}}$$

  - Quasiteilchenenergie („Dispersionsrelation”):

$$\hbar\omega_{\vec{k}} = \sqrt{A - 4B} = \hbar|\vec{k}|\sqrt{\frac{N}{mV}\tilde{V}(\vec{k}) + \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{4m^2}} \qquad (\text{für } |\vec{k}| \to 0 \text{ linear in } |\vec{k}|)$$

→ Die Quasiteilchen liefern positive Beiträge zur Energie.

→ Der Grundzustand ist dadurch definiert, dass er keine Quasiteilchen enthält:

$\alpha_{\vec{k}}\,|\text{g.s.}\rangle = 0$ für alle $\vec{k} \neq \vec{0}$ Grundzustand $\hat{=}$ „Quasiteilchenvakuum”

- Aber der Grundzustand enthält Teilchen (nicht Quasiteilchen!) außerhalb des Kondensats:

$$N' \equiv \langle \text{g.s.}| \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} a^\dagger_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle$$

- Aber der Grundzustand enthält Teilchen (nicht Quasiteilchen!) außerhalb des Kondensats:

$$N' \equiv \langle \mathrm{g.s.}| \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} |\mathrm{g.s.}\rangle$$

$$= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \langle \mathrm{g.s.}| \left(u_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha_{-\vec{k}}\right) \left(u_{\vec{k}}\, \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}}\right) |\mathrm{g.s.}\rangle$$

- Aber der Grundzustand enthält Teilchen (nicht Quasiteilchen!) außerhalb des Kondensats:

$$
\begin{aligned}
N' &\equiv \langle \text{g.s.}| \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} a^\dagger_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \langle \text{g.s.}| \left(u_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha_{-\vec{k}}\right)\left(u_{\vec{k}}\, \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}}\right) |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}\, \langle \text{g.s.}| \alpha_{-\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle
\end{aligned}
$$

- Aber der Grundzustand enthält Teilchen (nicht Quasiteilchen!) außerhalb des Kondensats:

$$
\begin{aligned}
N' &\equiv \langle \text{g.s.}| \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} a^\dagger_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \langle \text{g.s.}| \left(u_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha_{-\vec{k}}\right)\left(u_{\vec{k}}\,\alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\,\alpha^\dagger_{-\vec{k}}\right) |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}\, \langle \text{g.s.}| \alpha_{-\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}\, \langle \text{g.s.}| 1 + \alpha^\dagger_{-\vec{k}}\, \alpha_{-\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle
\end{aligned}
$$

- Aber der Grundzustand enthält Teilchen (nicht Quasiteilchen!) außerhalb des Kondensats:

$$
\begin{aligned}
N' &\equiv \langle \text{g.s.}| \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} a^\dagger_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \langle \text{g.s.}| \left(u_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha_{-\vec{k}}\right)\left(u_{\vec{k}}\, \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}}\right) |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}\, \langle \text{g.s.}| \alpha_{-\vec{k}}\, \alpha^\dagger_{-\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}\, \langle \text{g.s.}| 1 + \alpha^\dagger_{-\vec{k}}\, \alpha_{-\vec{k}} |\text{g.s.}\rangle \\
&= \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} v^2_{\vec{k}}
\end{aligned}
$$

5. Kurzer Ausblick auf die Quantenfeldtheorie

5. Kurzer Ausblick auf die Quantenfeldtheorie (mehr: $\rightarrow$ Sommersemester bei Prof. Moore)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

Klassische Mechanik von Punktteilchen

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Klassische Mechanik von Punktteilchen

- generalisierte Koordinaten: $q_k = q_k(t), \quad k = 1, \dots, N$

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

Klassische Mechanik von Punktteilchen

- generalisierte Koordinaten: $q_k = q_k(t), \quad k = 1, \ldots, N$
- Lagrange-Funktion: $L = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Klassische Mechanik von Punktteilchen

- generalisierte Koordinaten: $q_k = q_k(t), \quad k = 1, \dots, N$
- Lagrange-Funktion: $L = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k(t)\}, \{\dot{q}_k(t)\})$

5.1 Quantisierung von Feldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Klassische Mechanik von Punktteilchen

- generalisierte Koordinaten: $q_k = q_k(t), \quad k = 1, \ldots, N$
- Lagrange-Funktion: $L = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k(t)\}, \{\dot{q}_k(t)\})$
- Hamilton'sches Prinzip: $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$ Euler-Lagrange-Gleichungen

(= Bewegungsgleichungen)

Klassische Mechanik von Punktteilchen

- generalisierte Koordinaten: $q_k = q_k(t), \quad k = 1, \dots, N$
- Lagrange-Funktion: $L = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\})$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k(t)\}, \{\dot{q}_k(t)\})$
- Hamilton'sches Prinzip: $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$ Euler-Lagrange-Gleichungen

(= Bewegungsgleichungen)

- kanonisch konjugierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
- Hamilton-Funktion: $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

Quantisierung der klassischen Mechanik

Quantisierung der klassischen Mechanik

- Koordinaten, Impulse $\rightarrow$ Operatoren: $q_k \rightarrow \hat{q}_k\,, \quad p_k \rightarrow \hat{p}_k$

Quantisierung der klassischen Mechanik

- Koordinaten, Impulse $\to$ Operatoren: $q_k \to \hat{q}_k, \quad p_k \to \hat{p}_k$

  $\Rightarrow$ Hamilton-Funktion $\to$ Hamilton-Operator: $H \to \hat{H}$

  Energiespektrum: Eigenwerte von $\hat{H}$

Quantisierung der klassischen Mechanik

- Koordinaten, Impulse $\rightarrow$ Operatoren: $q_k \rightarrow \hat{q}_k, \quad p_k \rightarrow \hat{p}_k$

  $\Rightarrow$ Hamilton-Funktion $\rightarrow$ Hamilton-Operator: $H \rightarrow \hat{H}$

  Energiespektrum: Eigenwerte von $\hat{H}$

- Kommutator-Relationen: $\left[\hat{q}_k, \hat{q}_\ell\right] = \left[\hat{p}_k, \hat{p}_\ell\right] = 0, \quad \left[\hat{q}_k, \hat{p}_\ell\right] = i\hbar\,\delta_{k\ell}$

  „kanonische Quantisierungsbedingungen"

Quantisierung der klassischen Mechanik

- Koordinaten, Impulse $\to$ Operatoren: $q_k \to \hat{q}_k, \quad p_k \to \hat{p}_k$

  $\Rightarrow$ Hamilton-Funktion $\to$ Hamilton-Operator: $H \to \hat{H}$

  Energiespektrum: Eigenwerte von $\hat{H}$

- Kommutator-Relationen: $\left[\hat{q}_k, \hat{q}_\ell\right] = \left[\hat{p}_k, \hat{p}_\ell\right] = 0, \quad \left[\hat{q}_k, \hat{p}_\ell\right] = i\hbar\,\delta_{k\ell}$

  „kanonische Quantisierungsbedingungen"

  - Schrödinger-Bild: Operatoren zeitunabhängig
  - Heisenberg-Bild: Operatoren zeitabhängig

    $\to$ Kommutatoren zu gleichen Zeiten

Klassische Feldtheorie

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t,\vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index: $\phi(t,\vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\quad \mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x \, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\quad \mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

  $\Rightarrow$ Wirkung: $S = \int d^4x \, \mathscr{L}$

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

  $\Rightarrow$ Wirkung: $S = \int d^4x\, \mathscr{L}$

- $\delta S = 0 \;\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0$

  (= klassische Feldgleichungen)

Beispiele

1. elektromagnetisches Feld:

$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. elektromagnetisches Feld:

$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Euler-Lagrange: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

(inhomogene Maxwell-Gln.)

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. elektromagnetisches Feld:

$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Euler-Lagrange: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

(inhomogene Maxwell-Gln.)

2. Schrödinger-Theorie:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* + i\hbar\, \psi^* \dot{\psi} - V \psi^* \psi$$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. elektromagnetisches Feld:

   $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu,$ Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

   Euler-Lagrange: $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

   (inhomogene Maxwell-Gln.)

2. Schrödinger-Theorie:

   $\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* + i\hbar\,\psi^* \dot{\psi} - V\psi^*\psi$

   $\psi(t, \vec{x})$: komplexes Feld $\rightarrow$ betrachte ψ und ψ^* als unabhängige Variable

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. elektromagnetisches Feld:

$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Euler-Lagrange: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

(inhomogene Maxwell-Gln.)

2. Schrödinger-Theorie:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* + i\hbar\,\psi^* \dot{\psi} - V \psi^* \psi$$

$\psi(t, \vec{x})$: komplexes Feld $\rightarrow$ betrachte ψ und ψ^* als unabhängige Variable

$$\Rightarrow \; 0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*}$$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. elektromagnetisches Feld:

$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Euler-Lagrange: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

(inhomogene Maxwell-Gln.)

2. Schrödinger-Theorie:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* + i\hbar\, \psi^* \dot{\psi} - V \psi^* \psi$$

$\psi(t, \vec{x})$: komplexes Feld $\rightarrow$ betrachte ψ und ψ^* als unabhängige Variable

$$\Rightarrow \; 0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi - i\hbar\dot{\psi} + V\psi$$

$$\Leftrightarrow \; \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$ (Schrödinger-Gleichung)

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x \, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

  $\Rightarrow$ Wirkung: $S = \int d^4x \, \mathscr{L}$

- $\delta S = 0 \Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0$

  (= klassische Feldgleichungen)

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\quad \mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

  $\Rightarrow$ Wirkung: $S = \int d^4x\, \mathscr{L}$

- $\delta S = 0 \;\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0$

  (= klassische Feldgleichungen)

- kanonisch konjugierte Impulsdichten: $\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}$

Klassische Feldtheorie

- klassisches Feld: $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x)$

  $\hat{=}$ generalisierte Koordinaten $q_k(t)$ mit kontinuierlichem Index $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$

- Lagrange-Funktion: $L = \int d^3x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, $\mathscr{L}$: Lagrange-Dichte

  $\Rightarrow$ Wirkung: $S = \int d^4x\, \mathscr{L}$

- $\delta S = 0 \;\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen: $\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0$

  (= klassische Feldgleichungen)

- kanonisch konjugierte Impulsdichten: $\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}$

- Hamilton-Funktion: $H = \int d^3x\, \mathscr{H}$, $\mathscr{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}$

  Hamilton-Dichte

Kanonische Feldquantisierung

Kanonische Feldquantisierung

- Felder, kanon. konj. Impulsdichten $\rightarrow$ Operatoren: $\phi \rightarrow \hat{\phi}$, $\pi \rightarrow \hat{\pi}$

Kanonische Feldquantisierung

- Felder, kanon. konj. Impulsdichten $\rightarrow$ Operatoren: $\phi \rightarrow \hat{\phi}$, $\pi \rightarrow \hat{\pi}$
- Postuliere die Kommutator-Relationen

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{x}\,')\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}\,')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kanonische Feldquantisierung

- Felder, kanon. konj. Impulsdichten $\to$ Operatoren: $\phi \to \hat{\phi}$, $\pi \to \hat{\pi}$
- Postuliere die Kommutator-Relationen

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{x}')\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = 0, \quad \left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

  - Schrödinger-Bild: $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ zeitunabhängig
  - Heisenberg-Bild: $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ zeitabhängig

    $\to$ Kommutatoren zu gleichen Zeiten

Kanonische Feldquantisierung

- Felder, kanon. konj. Impulsdichten $\rightarrow$ Operatoren: $\phi \rightarrow \hat{\phi}$, $\pi \rightarrow \hat{\pi}$
- Postuliere die Kommutator-Relationen

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{x}')\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = 0, \qquad \left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

  - Schrödinger-Bild: $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ zeitunabhängig
  - Heisenberg-Bild: $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ zeitabhängig

    $\rightarrow$ Kommutatoren zu gleichen Zeiten

- Hamilton-Dichte, Hamilton-Funktion $\rightarrow$ Operatoren

  wie in der QM: Energiespektrum = Eigenwerte von $\hat{H}$

Kanonische Feldquantisierung

- Felder, kanon. konj. Impulsdichten $\rightarrow$ Operatoren: $\phi \rightarrow \hat{\phi}, \quad \pi \rightarrow \hat{\pi}$
- Postuliere die Kommutator-Relationen

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{x}')\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = 0, \qquad \left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')\right] = i\hbar\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

  - Schrödinger-Bild: $\hat{\phi}, \hat{\pi}$ zeitunabhängig
  - Heisenberg-Bild: $\hat{\phi}, \hat{\pi}$ zeitabhängig

    $\rightarrow$ Kommutatoren zu gleichen Zeiten

- Hamilton-Dichte, Hamilton-Funktion $\rightarrow$ Operatoren

  wie in der QM: Energiespektrum = Eigenwerte von $\hat{H}$

- Notation: Schreibe ab jetzt ϕ, π, ... für die Operatoren $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ ...

Schrödinger-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^\dagger + i\hbar\,\psi^\dagger\dot{\psi} - V\psi^\dagger\psi \qquad (\psi:\ \text{Operator} \Rightarrow \psi^* \to \psi^\dagger)$$

Schrödinger-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^\dagger + i\hbar\,\psi^\dagger\dot{\psi} - V\psi^\dagger\psi \qquad (\psi\text{: Operator} \;\Rightarrow\; \psi^* \to \psi^\dagger)$$

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\,\psi^\dagger$

Schrödinger-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^\dagger + i\hbar\,\psi^\dagger\dot{\psi} - V\psi^\dagger\psi \qquad (\psi\text{: Operator} \Rightarrow \psi^* \to \psi^\dagger)$$

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\,\psi^\dagger$

- Quantisierungsbedingungen:

$$\left[\psi(\vec{x}), \psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\right] = 0, \qquad \left[\psi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

$$\Rightarrow \quad \left[\psi(\vec{x}), \psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = 0, \qquad \left[\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

Schrödinger-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^\dagger + i\hbar\,\psi^\dagger\dot{\psi} - V\psi^\dagger\psi \qquad (\psi\text{:}\quad \text{Operator} \;\Rightarrow\; \psi^* \to \psi^\dagger)$$

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\,\psi^\dagger$
- Quantisierungsbedingungen:

$$\left[\psi(\vec{x}), \psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\psi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

$$\Rightarrow \quad \left[\psi(\vec{x}), \psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$$

$\hat{=}$ Kommutatorrelationen der bosonischen Feldoperatoren in Abschnitt 4.4!

Schrödinger-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi^\dagger + i\hbar\,\psi^\dagger\dot{\psi} - V\psi^\dagger\psi \qquad (\psi\text{: Operator } \Rightarrow\ \psi^* \to \psi^\dagger)$$

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\,\psi^\dagger$

- Quantisierungsbedingungen:

$$\left[\psi(\vec{x}),\psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\pi(\vec{x}),\pi(\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\psi(\vec{x}),\pi(\vec{x}\,')\right] = i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

$$\Rightarrow \quad \left[\psi(\vec{x}),\psi(\vec{x}\,')\right] = \left[\psi^\dagger(\vec{x}),\psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = 0, \quad \left[\psi(\vec{x}),\psi^\dagger(\vec{x}\,')\right] = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

$\hat{=}$ Kommutatorrelationen der bosonischen Feldoperatoren in Abschnitt 4.4!

- alte Sichtweise: Wellenfkt. der Einteilchen QM $\xrightarrow{\text{2. Quantisierung}}$ Feldoperator

  neue Sichtweise: klassisches Feld $\xrightarrow{\text{Quantisierung}}$ Feldoperator

5.2 Klein-Gordon-Theorie

5.2 Klein-Gordon-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  → Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

5.2 Klein-Gordon-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  → Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \dot{\phi}$

5.2 Klein-Gordon-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  → Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \dot{\phi}$

- Hamiltonoperator: $H = \int d^3x \, \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$

5.2 Klein-Gordon-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  → Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \dot{\phi}$
- Hamiltonoperator: $H = \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$
- Entwicklung der Feldoperatoren nach Impulsmoden (Heisenberg-Bild):

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger\, e^{+ip\cdot x}\right)\Big|_{p_0=E_p}, \qquad E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

5.2 Klein-Gordon-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  → Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \dot{\phi}$
- Hamiltonoperator: $H = \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$
- Entwicklung der Feldoperatoren nach Impulsmoden (Heisenberg-Bild):

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\underset{\uparrow}{a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}} + \underset{\uparrow}{a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ip\cdot x}} \right)\Bigg|_{p_0=E_p}, \qquad E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

(Relativist. QM: positive / negative Energie)

5.2 Klein-Gordon-Theorie

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$ (ab jetzt: $\hbar = c = 1$)

  $\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.: $\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$ Klein-Gordon-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = \dot{\phi}$
- Hamiltonoperator: $H = \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$
- Entwicklung der Feldoperatoren nach Impulsmoden (Heisenberg-Bild):

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\Big(\underset{\uparrow}{a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}} + \underset{\uparrow}{a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ip\cdot x}}\Big)\Big|_{p_0=E_p}, \qquad E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

(Relativist. QM: positive / negative Energie)

$$\pi(x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_p}{2}}\Big(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{+ip\cdot x}\Big)\Big|_{p_0=E_p}$$

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

$$\rightarrow \quad \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \qquad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

$$\rightarrow \; \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \qquad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\rightarrow \; H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \Big(\underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{Teilchenzahl-Op.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right]}_{\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(0)} \Big)$$

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

  $\rightarrow\ \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \quad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$

$$\rightarrow\ H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_p \left(\underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{Teilchenzahl-Op.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right]}_{\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(0)} \right)$$

  - zweiter Term $\rightarrow$ nicht messbare unendliche Vakuumenergie
    $\Rightarrow$ kann weggelassen werden

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

$$\rightarrow \quad \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \qquad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\rightarrow \quad H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \Big(\underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{Teilchenzahl-Op.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right]}_{\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(0)} \Big)$$

  - zweiter Term $\rightarrow$ nicht messbare unendliche Vakuumenergie
    $\Rightarrow$ kann weggelassen werden

- Vakuumzustand (= Grundzustand) $|0\rangle$: $\quad a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}$

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

  $\rightarrow \; \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \quad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$

$$\rightarrow \; H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_p \left(\underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{Teilchenzahl-Op.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right]}_{\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(0)} \right)$$

  - zweiter Term $\rightarrow$ nicht messbare unendliche Vakuumenergie
    $\Rightarrow$ kann weggelassen werden

- Vakuumzustand (= Grundzustand) $|0\rangle$: $\quad a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}$

- Einteilchen-Zustände: $\quad |\vec{p}\rangle \propto a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle \quad \Rightarrow \quad H|\vec{p}\rangle = E_p|\vec{p}\rangle$

- kanonische Quantisierungsbedingungen für ϕ und π

  $\rightarrow \ \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0, \quad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$

$$\rightarrow \ H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \Big(\underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{Teilchenzahl-Op.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}\right]}_{\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^3(0)} \Big)$$

  - zweiter Term $\rightarrow$ nicht messbare unendliche Vakuumenergie
    $\Rightarrow$ kann weggelassen werden

- Vakuumzustand (= Grundzustand) $|0\rangle$: $\quad a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}$

- Einteilchen-Zustände: $\quad |\vec{p}\rangle \propto a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle \quad \Rightarrow \quad H|\vec{p}\rangle = E_p|\vec{p}\rangle$

  Erinnerung: $\quad E_p \equiv +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} > 0 \quad \Rightarrow$ keine Zustände negativer Energie!

5.3 Dirac-Theorie

5.3 Dirac-Theorie

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  ψ, $\bar{\psi}$ unabh. → Euler-Lagrange-Gl.: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

5.3 Dirac-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  ψ, $\bar{\psi}$ unabh. → Euler-Lagrange-Gl.: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$

5.3 Dirac-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  $\psi,\ \bar{\psi}$ unabh. $\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.: $\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$

- Entwicklung der Feldoperatoren nach freien Lösungen (Heisenberg-Bild):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u_s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v_s(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x}\right)\Big|_{p_0=E_p}$$

5.3 Dirac-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  ψ, $\bar{\psi}$ unabh. → Euler-Lagrange-Gl.: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$
- Entwicklung der Feldoperatoren nach freien Lösungen (Heisenberg-Bild):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u_s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}}\, v_s(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x} \right)\Big|_{p_0 = E_p}$$

- kanonische Quantisierung mit Kommutatoren:

$$\rightarrow \; H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} + (\text{unendl. Konstante}) \right)$$

5.3 Dirac-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  ψ, $\bar{\psi}$ unabh. $\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.: $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$

- Entwicklung der Feldoperatoren nach freien Lösungen (Heisenberg-Bild):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u_s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v_s(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x} \right)\Big|_{p_0 = E_p}$$

- kanonische Quantisierung mit Kommutatoren:

$$\rightarrow \; H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{s\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} \underset{\uparrow}{-} b^{s\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} + (\text{unendl. Konstante})\right)$$

Spektrum nicht nach unten beschränkt!

5.3 Dirac-Theorie

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  $\psi, \ \bar{\psi}$ unabh. ➞ Euler-Lagrange-Gl.: $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$

- Entwicklung der Feldoperatoren nach freien Lösungen (Heisenberg-Bild):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u_s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}}\, v_s(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x} \right)\Big|_{p_0 = E_p}$$

- kanonische Quantisierung mit Kommutatoren:

$$\rightarrow \quad H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} \underset{\uparrow}{-} b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} + (\text{unendl. Konstante}) \right)$$

  Spektrum nicht nach unten beschränkt!

- Quantisierung mit Anitkommutatoren:

$$\rightarrow \quad H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} - (\text{unendl. Konstante}) \right)$$

5.3 Dirac-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \bar\psi\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi$ (nach wie vor: $\hbar = c = 1$)

  $\psi,\ \bar\psi$ unabh. ➞ Euler-Lagrange-Gl.: $\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi = 0$ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impulsdichte: $\pi = i\psi^\dagger$

- Entwicklung der Feldoperatoren nach freien Lösungen (Heisenberg-Bild):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \left(a^s_{\vec p}\, u_s(\vec p)\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\vec p}\, v_s(\vec p)\, e^{+ip\cdot x}\right)\Big|_{p_0=E_p}$$

- kanonische Quantisierung mit Kommutatoren:

$$\to\ H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_p\left(a^{s\dagger}_{\vec p}a^s_{\vec p} \underset{\uparrow}{-} b^{s\dagger}_{\vec p}b^s_{\vec p} + (\text{unendl. Konstante})\right)$$

  Spektrum nicht nach unten beschränkt!

- Quantisierung mit Anitkommutatoren:

$$\to\ H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_p\left(a^{s\dagger}_{\vec p}a^s_{\vec p} + b^{s\dagger}_{\vec p}b^s_{\vec p} - (\text{unendl. Konstante})\right)$$ funktioniert!