

Klassische Teilchen und Felder

Michael Buballa

Sommersemester 2021

Zusammenfassung

Dieses Skript zur Vorlesung „Klassische Teilchen und Felder“ stammt ursprünglich aus dem Wintersemester 2014/2015 und wurde während der Wintersemester 2017/2018 und 2018/2019 korrigiert und ergänzt. Während des laufenden Semesters wurden weitere Korrekturen vorgenommen und der Teil zur Speziellen Relativitätstheorie (Kapitel 10 – 12) hinzugefügt. Weitere Korrekturen und Anpassungen sind noch möglich.

Stand: 15.7.2021

Inhaltsverzeichnis

I	Klassische Mechanik	5
1	Newton'sche Mechanik	6
1.1	Kinematische Grundlagen	6
1.2	Die Newton'schen Gesetze	7
1.3	Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme	9
1.3.1	Impulserhaltung	10
1.3.2	Drehimpulserhaltung	10
1.3.3	Energieerhaltung	10
1.4	Mehrteilchen-Systeme	15
1.4.1	Schwerpunktsatz	17
1.4.2	Drehimpulssatz	18
1.4.3	Energiesatz	20
1.4.4	Abgeschlossene Systeme	22
2	Kepler-Problem	23
2.1	Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems	23
2.1.1	Schwerpunktsbewegung	24
2.1.2	Relativbewegung	24
2.2	Zentralkäfte	25
2.3	Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte	28
2.4	Lösung für das Gravitationspotenzial	33
2.5	Streuung im Zentralkraftfeld	37
3	Der starre Körper	42
3.1	Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers	42
3.2	Rotation um eine körperfeste Achse	44
3.2.1	Raumfeste Achse	45
3.2.2	Rollbewegung	51
3.3	Kinematik des starren Körpers	53
3.4	Der Trägheitstensor	55
3.5	Der Drehimpuls des starren Körpers	61

4	Lagrange-Mechanik	65
4.1	Zwangsbedingungen und Zwangskräfte	65
4.2	Lagrange-Gleichungen 1. Art	68
4.3	Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip . . .	73
4.4	Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art .	77
4.5	Erhaltungssätze	84
5	Schwingungen	87
5.1	Eindimensionaler harmonischer Oszillator	88
5.1.1	Ungedämpfte freie Schwingung	88
5.1.2	Gedämpfte Schwingung	89
5.2	Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	92
II	Klassische Elektrodynamik	100
6	Elektrostatik	101
6.1	Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz	101
6.2	Das elektrische Feld	105
6.3	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	108
6.4	Feldverhalten an Grenzflächen	112
6.5	Elektrostatische Feldenergie	114
6.6	Multipolentwicklung	118
6.7	Randwertprobleme der Elektrostatik	124
6.7.1	Eindeutigkeit der Lösungen	125
6.7.2	Spiegelladungsmethode	127
7	Magnetostatik	130
7.1	Grundlagen	130
7.1.1	Elektrische Ströme	130
7.1.2	Ladungserhaltung	132
7.2	Magnetische Induktion	134
7.3	Grundgleichungen der Magnetostatik	140
7.3.1	Das Vektorpotenzial	140
7.3.2	Eichung	141
7.3.3	Maxwell-Gleichungen	142
7.4	Multipolentwicklung lokalisierter Stromverteilungen	144
8	Elektro- und Magnetostatik in Materie	147
8.1	Elektrostatik der Dielektrika	148
8.2	Magnetostatik in Materie	155

9	Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder	159
9.1	Das Faraday'sche Induktionsgesetz	159
9.2	Der Verschiebungsstrom und die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen	164
9.3	Elektromagnetische Wellen	166
9.3.1	Polarisation	171
9.4	Elektromagnetische Potenziale	173
9.5	Energie des elektromagnetischen Feldes	176
III	Spezielle Relativitätstheorie	183
10	Lorentz-Transformationen	184
10.1	Grenzen des Newton'schen Weltbilds	184
10.2	Die Einstein'schen Postulate	186
10.3	Herleitung der Transformationsvorschrift	189
10.4	Relativität von Zeit- und Längenskalen	193
10.4.1	Zeitdilatation	194
10.4.2	Lorentz-Kontraktion	196
10.5	Addition von Geschwindigkeiten	197
10.6	Lorentz-Skalare, -Vektoren und -Tensoren	198
11	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	204
11.1	Lorentz-Transformation von Ladungs- und Stromdichten . . .	204
11.2	Der elektromagnetische Feldstärketensor	206
11.3	Lorentz-kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen	208
12	Relativistische Mechanik	211
12.1	Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit	211
12.2	Das relativistische Trägheitsgesetz	213
12.3	Impuls und Energie	215

Teil I

Klassische Mechanik

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

1.1 Kinematische Grundlagen

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Körpern im Raum als Funktion der Zeit unter dem Einfluss von Kräften. In der Newton'schen Mechanik geht man von der Existenz eines dreidimensionalen euklidischen Raumes aus, in dem die Bewegung stattfindet, und einer davon unabhängigen absoluten Zeit. Wie wir heute wissen, ist diese Vorstellung nicht richtig (\rightarrow Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie), genügt aber zur Beschreibung vieler Phänomene im Alltag.

Häufig reicht es aus, statt ausgedehnter Körper die Bewegung von *Punktmassen* (auch: „Massepunkte“ oder „Massenpunkte“, im Folgenden oft auch einfach „Teilchen“) zu beschreiben, bei denen man sich die gesamte Masse des Körpers in einem Punkt vereinigt denkt. (Beispiel: Planetenbewegung, bei der die Ausdehnung der Himmelskörper gegenüber den Entfernungen vernachlässigt werden kann.)

Der Bewegungsablauf eines Teilchens wird dann durch die Angabe seines Ortes \vec{r} zur Zeit t beschrieben:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \sum_{i=1}^3 r_i(t) \vec{e}_i \quad (1.1)$$

Dabei haben wir eine kartesische Orthonormalbasis

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

und kartesische Koordinaten

$$r_1 \equiv x, \quad r_2 \equiv y, \quad r_3 \equiv z \quad (1.3)$$

verwendet.¹

Die *Momentangeschwindigkeit* der Punktmasse ist durch die Ableitung von Gl. (1.1) nach der Zeit gegeben,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i(t) \vec{e}_i, \quad (1.4)$$

die *Momentanbeschleunigung* durch die zweite Ableitung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \ddot{r}_i(t) \vec{e}_i. \quad (1.5)$$

(Vorsicht: Bei Kugel- oder Zylinderkoordinaten können auch die Basisvektoren von der Zeit abhängen und müssen nach Produktregel mit abgeleitet werden.)

1.2 Die Newton'schen Gesetze

Die Bewegung eines oder mehrerer Körper basiert nach Newton auf folgenden Postulaten (1687, Formulierung hier teilweise modernisiert):

N1: Ein Teilchen verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn einwirken. („Trägheitsgesetz“, Galilei 1638)

N2: Wirkt auf ein Teilchen mit Masse m die Kraft \vec{F} , dann gilt für seinen Impuls $\vec{p} := m\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \quad (1.6)$$

N3: Übt ein Teilchen j auf ein Teilchen i die Kraft $\vec{F}^{(ij)}$ aus, dann übt das Teilchen i auf das Teilchen j die Kraft

$$\vec{F}^{(ji)} = -\vec{F}^{(ij)} \quad (1.7)$$

aus („*actio = reactio*“).

¹ Bekanntlich sind – abhängig von der Geometrie des Problems – andere Koordinaten oft zweckmäßiger, z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Hinzu kommt das *Superpositionsprinzip*:

N4: Wirken auf ein Teilchen mehrere Kräfte \vec{F}_i , so ist die resultierende Gesamtkraft durch die Vektorsumme

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.8)$$

gegeben.

Bemerkungen:

- Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir im Folgenden davon aus, dass die Massen der Teilchen konstant bleiben. Dann ergibt sich aus N2:

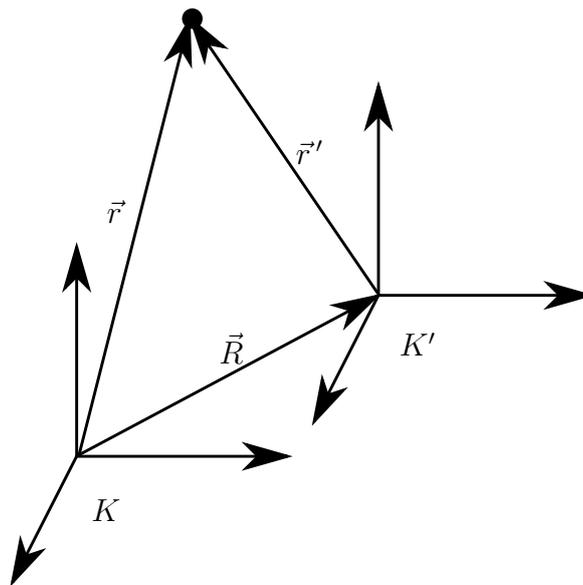
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}. \quad (1.9)$$

- Für $\vec{F} = \vec{0}$ folgt dann

$$m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.}, \quad (1.10)$$

d.h. N1 ist ein Spezialfall von N2.

- Betrachte ein Koordinatensystem K und ein dazu parallel verschobenes Koordinatensystem K' , dessen Ursprung in den Koordinaten von K durch $\vec{R}(t)$ gegeben ist:



Ein Teilchen, das in K die Koordinaten \vec{r} besitzt, hat dann in K' die Koordinaten

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}. \quad (1.11)$$

Daraus folgt

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}}. \quad (1.12)$$

Für ein Teilchen, das sich in K geradlinig gleichförmig bewegt, $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, gilt also $\ddot{\vec{r}}' = -\ddot{\vec{R}}$. Insbesondere wenn K' relativ zu K beschleunigt ist, $\ddot{\vec{R}} \neq 0$, gilt dann also $\ddot{\vec{r}}' \neq \vec{0}$, d.h. die in K' beobachtete Bewegung ist nicht geradlinig gleichförmig. Welches ist nun das „richtige“ Koordinatensystem?

N1 sagt, dass $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, wenn keine Kraft wirkt. Damit postulieren Galilei und Newton implizit, dass man eindeutig feststellen kann, ob Kräfte wirken und dass es dann Koordinatensysteme gibt, in denen N1 gilt. (Die Kritik an diesen nicht-trivialen Annahmen ist Ausgangspunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie.)

Koordinatensysteme, in denen N1 gilt, nennt man *Inertialsysteme*. Dort gilt dann auch N2. Offensichtlich sind Koordinatensysteme, die sich gegenüber eines Inertialsystems geradlinig gleichförmig bewegen ($\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$), ebenfalls Inertialsysteme.

- Wir betrachten N Teilchen mit Massen m_i und Orten $\vec{r}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Auf das i -te Teilchen wirke die Kraft $\vec{F}^{(i)}$. Im Allgemeinen kann $\vec{F}^{(i)}$ von allen Teilchen-Orten und -Geschwindigkeiten sowie explizit von der Zeit abhängen, d.h. es gilt gemäß N2

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, \dot{\vec{r}}^{(1)}, \dots, \dot{\vec{r}}^{(N)}, t). \quad (1.13)$$

Dies entspricht $3N$ gekoppelten Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (Faktor 3 wegen der drei Komponenten von $\vec{r}^{(i)}$). Man kann zeigen, dass eine eindeutige Lösung existiert, wenn $6N$ Anfangsbedingungen gegeben sind, z.B. $\vec{r}^{(i)}(t_0), \dot{\vec{r}}^{(i)}(t_0)$, $i = 1, \dots, N$ zu einer Zeit t_0 . Im Allgemeinen lässt sich die Lösung aber nur numerisch finden.

1.3 Erhaltungssätze für Einteilchen-Systeme

Aus den Newton'schen Gesetzen kann man einige einfache Erhaltungssätze herleiten:

1.3.1 Impulserhaltung

Aus N2 folgt unmittelbar

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow \vec{p} = \text{const.} \quad \text{für} \quad \vec{F} = \vec{0}, \quad (1.14)$$

d.h. wenn die Gesamtkraft auf das Teilchen verschwindet, bleibt sein (linearer) Impuls erhalten.

1.3.2 Drehimpulserhaltung

Der *Drehimpuls* eines Teilchens ist definiert als

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1.15)$$

(Achtung: \vec{L} hängt von der Wahl des Koordinatenursprungs ab!) Es folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times m\vec{v}=\vec{0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \quad (1.16)$$

mit dem *Drehmoment*

$$\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.17)$$

Es gilt also

$$\vec{L} = \text{const.} \quad \text{für} \quad \vec{N} = \vec{0}, \quad (1.18)$$

d.h. der Drehimpuls (bzgl. eines gegebenen Koordinatenursprungs) ist erhalten, wenn das Drehmoment (bzgl. des gleichen Koordinatenursprungs) verschwindet.

1.3.3 Energieerhaltung

Die an einem Teilchen entlang eines infinitesimalen Wegstücks $d\vec{r}$ geleistete *Arbeit* ist definiert als

$$dW = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r} \quad (1.19)$$

(„Kraft in Wegrichtung mal Weg“). Entlang eines endlichen Weges \mathcal{C} ergibt sich daraus:

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (1.20)$$

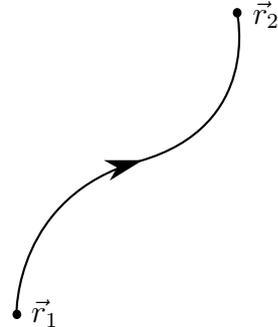
Um dies auszuwerten, parametrisieren wir den Weg nach der Zeit:

$$\mathcal{C} : t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{r}(t) \quad (1.21)$$

mit

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 \quad (\text{Anfangspunkt})$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2 \quad (\text{Endpunkt}).$$



Für das Wegelement ergibt sich

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt \quad (1.22)$$

und damit für die geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \\ &\stackrel{\text{N2}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v}(t) \cdot m\dot{\vec{v}}(t) \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2(t) \right) = \frac{m}{2} \vec{v}^2(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} (\vec{v}^2(t_2) - \vec{v}^2(t_1)) \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned} \quad (1.23)$$

d.h. die an dem Teilchen geleistete Arbeit ist gleich der Änderung der *kinetischen Energie*

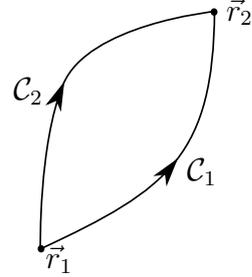
$$T = \frac{m}{2} \vec{v}^2. \quad (1.24)$$

Ein *konservatives Kraftfeld* ist ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, für das die geleistete Arbeit nur von den Anfangs- und Endpunkten des Weges abhängt, nicht aber von dessen genauem Verlauf.²

² Hier und im Folgenden nehmen wir an, dass \vec{F} nicht von der Geschwindigkeit oder explizit von der Zeit abhängt, da ansonsten die geleistete Arbeit sogar für den gleichen Weg unterschiedlich sein kann, wenn er mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten oder zu unterschiedlichen Zeiten durchlaufen wird. Eine Ausnahme stellt die Lorentz-Kraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld dar. Diese hängt zwar von der Geschwindigkeit des Teilchens ab, steht aber stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so dass die vom Magnetfeld geleistete Arbeit verschwindet (s. Kapitel 7).

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}), \quad (1.25)$$

falls \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen.

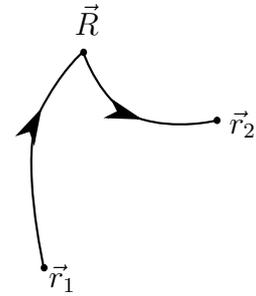


Wir können dann ein *Potenzial*

$$V_{\vec{R}}(\vec{r}) := - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') \quad (1.26)$$

definieren, das von einem beliebig gewählten Referenzpunkt \vec{R} abhängt. Für die auf dem Weg von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 geleistete Arbeit W_{12} gilt dann:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{R}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{\vec{R}}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= V_{\vec{R}}(\vec{r}_1) - V_{\vec{R}}(\vec{r}_2) \end{aligned} \quad (1.27)$$



Sei \vec{R}' ein anderer Referenzpunkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} V_{\vec{R}'}(\vec{r}) &= - \int_{\vec{R}'}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') \\ &= - \underbrace{\int_{\vec{R}'}^{\vec{R}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{\text{hängt nicht von } \vec{r} \text{ ab.}} - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = V_{\vec{R}}(\vec{r}) + \text{const.} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Da die Konstante bei Potenzialdifferenzen herausfällt, lässt man die Angabe des Referenzpunktes meistens weg. Man sollte jedoch stets im Hinterkopf behalten, dass das Potential dann nur bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt ist.

Für die zwischen gegebenen Anfangs- und Endpunkten geleistete Arbeit, Gl. (1.27), können wir dann schreiben:

$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2 \quad (\text{für konservative Kräfte}). \quad (1.29)$$

Vergleich mit Gl. (1.23), die wir als $W_{12} = T_2 - T_1$ schreiben können, liefert

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1.30)$$

und damit einen weiteren Erhaltungssatz:

Die *Gesamtenergie*

$$E = T + V \quad (1.31)$$

ist für konservative Kräfte erhalten.

Weitere Eigenschaften konservativer Kraftfelder:

- Sei $V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$.

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir dann für das Differenzial:

$$dV = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}. \quad (1.32)$$

Im letzten Schritt haben wir dabei verwendet, dass

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Für die Arbeit ergibt sich damit

$$W_{12} = V_1 - V_2 = - \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}). \quad (1.34)$$

Andererseits gilt allgemein nach Definition

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}), \quad (1.35)$$

d.h.

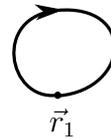
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}). \quad (1.36)$$

Da dies für beliebige Werte von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 erfüllt ist, muss gelten:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}). \quad (1.37)$$

- Für *geschlossene* Wege gilt:

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = V_1 - V_1 = 0. \quad (1.38)$$



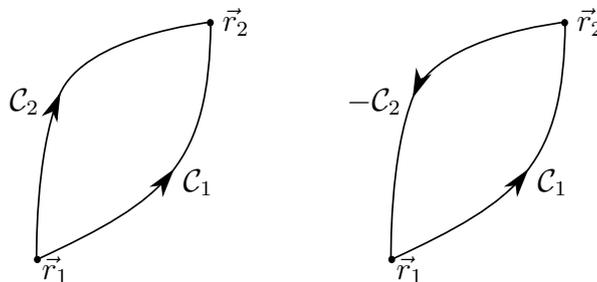
Auch die Umkehrung gilt:

Wenn das Integral $\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ für *alle* geschlossenen Wege \mathcal{C} verschwindet, dann ist das Kraftfeld konservativ.

Um das zu zeigen, betrachten wir zwei Wege \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 mit den selben Anfangs- und Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) - \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \int_{-\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \oint_{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0. \quad (1.39)$$

Dabei ist $-\mathcal{C}_2$ der rückwärts durchlaufene Weg \mathcal{C}_2 :



Für diesen gilt $\int_{-\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$, da das Kraftfeld an jedem Punkt in umgekehrter Richtung durchlaufen wird, so dass die geleistete infinitesimale Arbeit dW in $-dW$ übergeht. $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ ist der aus \mathcal{C}_1 und $-\mathcal{C}_2$ zusammengesetzte geschlossene Weg. Letzterer verschwindet nach Voraussetzung.

Also gilt

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \quad (1.40)$$

für alle Wege \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 mit den selben Anfangs- und Endpunkten, d.h. das Kraftfeld ist konservativ.

- Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes kann man das geschlossene Linienintegral in ein Flächenintegral umwandeln:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{A}} d\vec{\sigma} \cdot \text{rot } \vec{F}(\vec{r}). \quad (1.41)$$

Dabei ist \mathcal{A} eine Fläche, die durch \mathcal{C} begrenzt wird. Das Integral auf der linken Seite kann daher nur dann für alle Wege verschwinden, wenn $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ für alle \vec{r} . Es gilt also:

$$\text{Ein Kraftfeld ist konservativ.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \forall \vec{r}. \quad (1.42)$$

In der Tat gilt für konservative Kraftfelder:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} V(\vec{r}) \right) = \vec{0}, \quad (1.43)$$

da die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet.

1.4 Mehrteilchen-Systeme

Wir betrachten wieder ein System von N Teilchen mit Massen m_i und Koordinaten $\vec{r}^{(i)}$. Bei den Kräften ist es nützlich, zwischen *inneren Kräften*, die die Teilchen gegenseitig auf einander ausüben, und *äußeren Kräften* zu unterscheiden, die einen anderen Ursprung haben. Die Gesamtkraft $\vec{F}^{(i)}$, die auf das i -te Teilchen wirkt, lässt sich dann schreiben als

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}. \quad (1.44)$$

Dabei ist $F_{ex}^{(i)}$ die äußere Kraft auf das i -te Teilchen und $\vec{F}^{(ij)}$ die Kraft, die das j -te Teilchen auf das i -te Teilchen ausübt.

Beispiel: zwei durch eine Feder verbundene Kugeln im Schwerfeld der Erde
 \rightarrow Federkraft = innere Kraft, Schwerkraft = äußere Kraft

Ein System nennt man *abgeschlossen*, wenn keine äußeren Kräfte wirken, d.h. $\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0}$ für alle i .

Bei der obigen Zerlegung sind wir stillschweigend davon ausgegangen, dass die inneren Kräfte *Zweiteilchen-Kräfte* sind, die nur von den Koordinaten oder Geschwindigkeiten zweier Teilchen i und j abhängen und durch die Anwesenheit der anderen Teilchen nicht beeinflusst werden. Grundsätzlich sind auch Drei- und Mehrteilchenkräfte denkbar, werden aber hier nicht weiter betrachtet, zumal sie in der klassischen Physik nicht als fundamentale Kräfte vorkommen und dem Superpositionsprinzip N4 widersprechen.

Gemäß N3 unterliegen Zweiteilchen-Kräfte dem Gesetz *actio = reactio*, $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$. Besonders wichtig sind *zentrale* Zweiteilchenkräfte, die in Richtung der Verbindungslinie der beiden Teilchen zeigen und deren Stärke nur vom Betrag des Abstands abhängen.³

$$\vec{F}^{(ij)}(\vec{r}^{(i)}, \vec{r}^{(j)}) = f^{(ij)}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad \text{mit} \quad \vec{r}_{ij} := \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}, \quad r_{ij} := |\vec{r}_{ij}| \quad (1.45)$$

Beispiele:

(i) Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 :

$$\vec{F}_G^{(12)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1.46)$$

ii) Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 :

$$\vec{F}_C^{(12)}(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1.47)$$

Im Folgenden wollen wir einige Sätze herleiten, die für Mehrteilchen-Systeme mit inneren Zweiteilchen-Kräften und äußeren Kräften gelten.

³ In der Literatur wird manchmal auch die weniger strenge Definition verwendet, wonach nur die Bedingung erfüllt sein muss, dass die Richtung der Kraft entlang der Verbindungslinie zeigt, die Stärke aber auch von der Richtung abhängen darf. Wir bleiben im Folgenden jedoch bei der genannten strengeren Definition.

1.4.1 Schwerpunktsatz

Wir definieren zunächst:

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N \vec{p}^{(i)} \quad (\text{Gesamtimpuls}) \quad (1.48)$$

$$\vec{F}_{ex} := \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)} \quad (\text{gesamte äußere Kraft}) \quad (1.49)$$

$$M := \sum_{i=1}^N m_i \quad (\text{Gesamtmasse}) \quad (1.50)$$

sowie den *Schwerpunktsvektor*

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}^{(i)}. \quad (1.51)$$

Für den Gesamtimpuls ergibt sich daraus

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = M \dot{\vec{R}}, \quad (1.52)$$

vollkommen analog zum Impuls eines einzelnen Teilchens mit Masse M und Geschwindigkeit $\dot{\vec{R}}$.

Als nächstes wollen wir die zeitliche Ableitung

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} \quad (1.53)$$

berechnen. Nach N2 gilt zunächst für das i -te Teilchen:

$$\dot{\vec{p}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} + \vec{F}_{ex}^{(i)}. \quad (1.54)$$

Summation über alle Teilchen liefert dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}^{(i)} &= \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}^{(ij)}}_{= \vec{0}, \text{ da } \vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ex}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.55)$$

und damit

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}_{ex}. \quad (1.56)$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm wirkten. Dies ist letztlich auch die Grundlage dafür, dass das idealisierte Konzept der Punktmassen funktioniert: Statt der komplizierten Bewegung eines aus vielen Teilchen zusammengesetzten ausgedehnten Körpers beschreiben wir die Bewegung seines Schwerpunkts, was in vielen Fällen ausreichend ist.

Für abgeschlossene Systeme ($\vec{F}_{ex}^{(i)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ex} = \vec{0}$) ergibt sich aus Gl. (1.56), dass der Gesamtimpuls erhalten bleibt: $\dot{\vec{P}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = const.$

1.4.2 Drehimpulssatz

Analog zum vorherigen Abschnitt definieren wir

$$\vec{L} := \sum_{i=1}^N \vec{L}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)} \quad (\text{Gesamtdrehimpuls}) \quad (1.57)$$

$$\vec{N}_{ex} := \sum_{i=1}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)} \quad (\text{gesamtes äußeres Drehmoment}) \quad (1.58)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\vec{r}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)} + \vec{r}^{(i)} \times \dot{\vec{p}}^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\underbrace{\dot{\vec{r}}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)}}_{=\vec{0}} + \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}^{(i)} \times \left(\vec{F}_{ex}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}^{(ij)} \right) \\ &= \vec{N}_{ex} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Den letzten Term können wir weiter umformen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^N \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (\vec{r}^{(i)} \times \vec{F}^{(ij)} + \vec{r}^{(j)} \times \vec{F}^{(ji)}) \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}) \times \vec{F}^{(ij)}, \tag{1.60}
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt beim zweiten Term die Summationsindizes i und j vertauscht und im letzten Schritt $\vec{F}^{(ji)} = -\vec{F}^{(ij)}$ (N3) verwendet haben. Für Zweiteilchenkräfte, die entlang der Verbindungslinie gerichtet sind, d.h. $\vec{F}^{(ij)} \sim (\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)})$, insbesondere für zentrale Zweiteilchen-Kräfte, verschwindet das Kreuzprodukt. In diesem Fall vereinfacht sich Gl. (1.59) auf

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}_{ex}. \tag{1.61}$$

Für den Gesamtdrehimpuls ergibt sich eine interessante Zerlegung, wenn man die Ortsvektoren relativ zum Schwerpunkt angibt,

$$\vec{r}^{(i)} =: \vec{R} + \vec{r}^{(i)'}. \tag{1.62}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i (\vec{R} + \vec{r}^{(i)'}) \times \vec{p}^{(i)} \\
&= \vec{R} \times \sum_i \vec{p}^{(i)} + \sum_i \vec{r}^{(i)'} \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}^{(i)'}) \\
&= \vec{R} \times \vec{P} + \left(\sum_i m_i \vec{r}^{(i)'} \right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}^{(i)'} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)'} \tag{1.63}
\end{aligned}$$

Aus der Definition des Schwerpunktsvektors, Gl. (1.51), ergibt sich

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}^{(i)} = \sum_i m_i \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{(i)'} = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}^{(i)'} \tag{1.64}$$

und somit

$$\sum_i m_i \vec{r}^{(i)'} = \vec{0}. \tag{1.65}$$

Der mittlere Term in Gl. (1.63) verschwindet also. Wenn wir ferner definieren

$$\vec{p}^{(i)'} := m_i \dot{\vec{r}}^{(i)'}, \quad (1.66)$$

erhalten wir schließlich

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}^{(i)'} \times \vec{p}^{(i)'}. \quad (1.67)$$

Den beiden Termen kann man folgende Bedeutung zuordnen;

$$\begin{aligned} \vec{R} \times \vec{P} : & \quad \text{„Bahn-Drehimpuls“} \\ \sum_{i=1}^N \vec{r}^{(i)'} \times \vec{p}^{(i)'} : & \quad \text{„innerer Drehimpuls“, „Eigendrehimpuls“} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Eine ähnliche Zerlegung des Drehimpulses spielt eine große Rolle in der Quantenmechanik (Bahndrehimpuls und Spin).

1.4.3 Energiesatz

Wir nehmen wieder an, dass wir zentrale Zweiteilchen-Kräfte vorliegen haben. Man kann zeigen, dass diese konservativ sind und sich aus einem Potenzial ableiten lassen, das nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt:

$$\vec{F}^{(ij)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)}, \quad V^{(ij)} = V^{(ji)} = V(r_{ij}), \quad (1.69)$$

mit $r_{ij} = |\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}|$ und

$$\vec{\nabla}^{(i)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \\ \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Es gilt dann

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(i)}} = -\frac{\partial r_{ij}}{\partial r_k^{(j)}} \quad (1.71)$$

und damit

$$\vec{F}^{(ji)} = -\vec{\nabla}^{(j)} V^{(ji)} = -\vec{\nabla}^{(j)} V^{(ij)} = \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = -\vec{F}^{(ij)}, \quad (1.72)$$

im Einklang mit N3.

Wenn zusätzlich externe Kräfte wirken, gilt also nach N2

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j \neq i} (-\vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)}) + \vec{F}_{ex}^{(i)}. \quad (1.73)$$

Skalare Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}^{(i)}$ und Summation über alle Teilchen liefert

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}. \quad (1.74)$$

Die Summanden der linken Seite können wir schreiben als

$$m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right). \quad (1.75)$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite ergibt sich

$$- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} V^{(ij)} = - \sum_{i < j} (\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)}) V^{(ij)} = - \sum_{i < j} \frac{d}{dt} V^{(ij)}, \quad (1.76)$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel verwendet haben.⁴ Wir erhalten also

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right) = - \frac{d}{dt} \sum_{i < j} V^{(ij)} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)}, \quad (1.77)$$

und damit den folgenden Energiesatz

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_{i=1}^N \vec{v}^{(i)} \cdot \vec{F}_{ex}^{(i)} \quad (1.78)$$

mit

$$T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}^{(i)2} \right) \quad (\text{kinetische Energie des Gesamtsystems}) \quad (1.79)$$

$$V = \sum_{i < j} V^{(ij)} \quad (\text{innere potenzielle Energie}). \quad (1.80)$$

Die Summe $E = T + V$ nennt man auch die „innere Energie“ des Systems. Die rechte Seite von Gl. (1.78) beschreibt die Leistung (Arbeit pro Zeit) der externen Kräfte. Die Änderung der inneren Energie im Zeitintervall dt ist also gleich der in diesem Zeitintervall von den externen Kräften geleisteten Arbeit.

⁴ $\frac{d}{dt} V^{(ij)} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(i)}} \dot{r}_k^{(i)} + \frac{\partial V^{(ij)}}{\partial r_k^{(j)}} \dot{r}_k^{(j)} \right) = (\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \vec{\nabla}^{(i)} + \dot{\vec{r}}^{(j)} \cdot \vec{\nabla}^{(j)}) V^{(ij)}$

1.4.4 Abgeschlossene Systeme

In abgeschlossenen Systemen verschwinden per definitionem alle äußeren Kräfte und damit auch die äußeren Drehmomente. Für zentrale innere Zweiteilchen-Kräfte ergeben sich dann Erhaltungsgrößen:

- Gesamtimpuls: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{const.}$

Mit $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ folgt, dass sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig bewegt:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{1}{M}\vec{P}t \quad (1.81)$$

- Gesamtdrehimpuls: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$

Aus der Zerlegung $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{in}$ folgt mit Gl. (1.81)

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R}_0 \times \vec{P}}_{=\text{const.}} + \frac{1}{M}t \underbrace{\vec{P} \times \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{L}_{in} = \text{const.} \quad (1.82)$$

und damit $\vec{L}_{in} = \text{const.}$

- innere Energie: $\frac{d}{dt} (T + V) = 0 \Rightarrow E = T + V = \text{const.}$

Das System kann daher durch *zehn Erhaltungsgrößen* charakterisiert werden: den Komponenten von \vec{R}_0 , \vec{P} und \vec{L} sowie der inneren Energie E .

Kapitel 2

Kepler-Problem

2.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung des Zweikörpersystems

Wir betrachten zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 , die auf einander die Kräfte $\vec{F}^{(12)} = \vec{F}$ bzw. $\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}$ (actio = reactio) ausüben. Das System sei abgeschlossen, d.h. es wirken keine äußere Kräfte. Dann gilt nach N2:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}^{(1)} = \vec{F} \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}^{(2)} = -\vec{F} \quad (2.2)$$

Wie gehabt definieren wir die Gesamtmasse und den Schwerpunktsvektor als

$$M = m_1 + m_2 \quad (2.3)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}^{(1)} + m_2 \vec{r}^{(2)}) \quad (2.4)$$

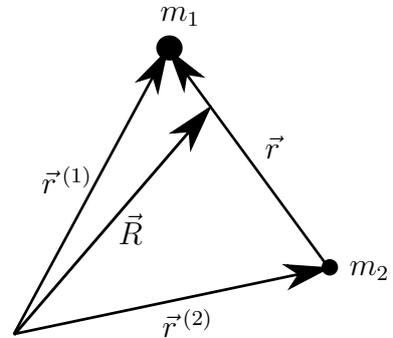
und außerdem den Relativvektor

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}. \quad (2.5)$$

Daraus ergibt sich:

$$\vec{r}^{(1)} = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (2.6)$$

$$\vec{r}^{(2)} = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (2.7)$$



2.1.1 Schwerpunktsbewegung

Addition von Gl. (2.1) und Gl. (2.2) liefert

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1\ddot{\vec{r}}^{(1)} + m_2\ddot{\vec{r}}^{(2)} = \vec{0} \quad (2.8)$$

und somit

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = \text{const.} \quad (2.9)$$

Wie wir in Abschnitt 1.3 allgemein für abgeschlossene Systeme gezeigt haben, ist der Gesamtimpuls also erhalten, und der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\vec{R}}$ durch den Raum.

2.1.2 Relativbewegung

Wir multiplizieren Gl. (2.1) mit m_2 und Gl. (2.2) mit m_1 und subtrahieren die beiden Gleichungen von einander:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}^{(1)} - \ddot{\vec{r}}^{(2)}) = (m_1 + m_2) \vec{F} \quad (2.10)$$

Division durch $m_1 + m_2$ liefert

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (2.11)$$

mit der *reduzierten Masse*

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.12)$$

Die Relativbewegung des Zweiteilchensystems verhält sich also so wie die Bewegung eines einzelnen Teilchens mit der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Kraft \vec{F} . Wir haben damit das Zweikörper-Problem auf ein äquivalentes Einkörper-Problem reduziert.

Für die reduzierte Masse gilt offensichtlich

$$\mu M = m_1 m_2 \quad (2.13)$$

sowie

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (2.14)$$

Interessant sind auch die folgenden Spezialfälle:

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m_1^2}{2m_1} = \frac{m_1}{2} \quad (2.15)$$

$$m_1 \ll m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1 \quad (2.16)$$

Beispiel: Erde und Sonne, $m_{\oplus} = 3 \cdot 10^{-6} m_{\odot}$

$$\Rightarrow \quad \mu \approx m_{\oplus}, \quad M \approx m_{\odot}, \quad \vec{r}_{\odot} \approx \vec{R}, \quad \vec{r}_{\oplus} \approx \vec{R} + \vec{r}, \quad (2.17)$$

d.h. im Schwerpunktsystem ($\vec{R} = \vec{0}$) ruht die Sonne in sehr guter Näherung am Koordinatenursprung, und \vec{r} entspricht der Position der Erde.

Nachdem wir die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktsbewegung bereits in Abschnitt 2.1.1 gelöst haben, werden wir uns im Folgenden auf das äquivalente Einteilchenproblem für die Relativbewegung konzentrieren. Dabei werden wir die Teilchenmasse in der Regel mit m bezeichnen. Wir sollten jedoch im Hinterkopf behalten, dass es sich dabei eigentlich um die reduzierte Masse μ handelt.

2.2 Zentralkäfte

Wir setzen ab jetzt voraus, dass die Kraft \vec{F} eine zentrale Zweiteilchenkraft ist. Die Relativbewegung entspricht dann dem äquivalenten Problem, bei dem sich ein Teilchen mit der reduzierten Masse $m \equiv \mu$ im Feld einer *Zentralkraft*

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.18)$$

bewegt, also einer Kraft, die entlang der Verbindungslinie zum Ursprung gerichtet ist und deren Stärke nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ abhängt.

Man kann leicht zeigen, dass solche Kräfte konservativ sind und aus einem Potenzial $V(r)$ abgeleitet werden können, das nur von r abhängt (\rightarrow Übung),

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r). \quad (2.19)$$

Es gilt dann

$$f(r) = -\frac{dV}{dr}(r). \quad (2.20)$$

Ein wichtiges Beispiel ist das Gravitationspotenzial

$$V_G(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} = -G \frac{\mu M}{r}. \quad (2.21)$$

Für das Drehmoment gilt

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0}. \quad (2.22)$$

Der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (2.23)$$

ist damit konstant. Dies hat folgende wichtige Konsequenzen:

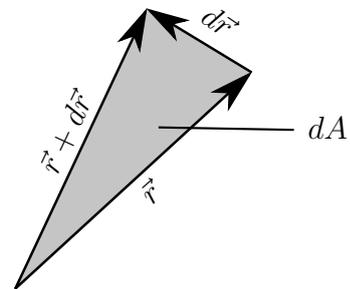
- Wegen des Kreuzprodukts steht \vec{L} senkrecht auf \vec{r} und $\dot{\vec{r}}$. Da \vec{L} konstant ist, sich also nicht mit der Zeit ändert, bedeutet dies, dass die Bewegung in einer *festen Ebene* stattfindet, die senkrecht zu \vec{L} liegt.
- Zweites Kepler'sches Gesetz:

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz überstreicht die Verbindungslinie zwischen einem Planeten und der Sonne in gleichen Zeiten die gleiche (vom jeweiligen Planeten abhängige) Fläche.

Betrachten wir dazu das Flächenelement, das von der Verbindungslinie überstrichen wird, wenn sich der Planet vom Ort \vec{r} zum Ort $\vec{r} + d\vec{r}$ bewegt.

Der Flächeninhalt beträgt dann⁵

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|. \quad (2.24)$$



⁵Erinnerung: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelograms. Das Dreieck ist gerade halb so groß.

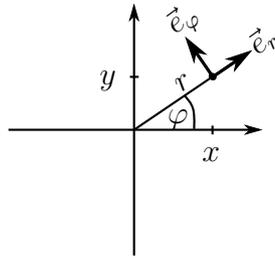
Für die pro Zeitintervall dt überstrichene Fläche $dA = \frac{dA}{dt} dt$ gilt also

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.}, \quad (2.25)$$

da $\vec{L} = \text{const.}$

Das zweite Kepler'sche Gesetz beruht also allein auf der Drehimpulserhaltung und gilt daher für alle Zentralkräfte, nicht nur für die Gravitationskraft.

Da die Bewegung in einer festen Ebene stattfindet, können wir ein Koordinatensystem wählen, bei dem \vec{L} in z -Richtung zeigt und die Teilchenbahn in der x - y -Ebene liegt. Wegen der Radialsymmetrie des Kraftfeldes bietet es sich dann an, die Bewegung in ebenen Polarkoordinaten zu beschreiben:



$$x = r \cos \varphi \quad (2.26)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (2.27)$$

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad (2.28)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad (2.29)$$

Für zeitabhängige Koordianten $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ ergibt sich daraus, dass die Basisvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ ebenfalls von der Zeit abhängen. Insbesondere gilt:

$$\dot{\vec{e}}_r = (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) \dot{\varphi} = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi} \quad (2.30)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = (-\cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y) \dot{\varphi} = -\vec{e}_r \dot{\varphi} \quad (2.31)$$

Aus

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (2.32)$$

folgt damit für die Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (2.33)$$

Daraus ergibt sich für den Drehimpuls

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\dot{r} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi} \vec{e}_z. \quad (2.34)$$

Auch die Gesamtenergie können wir in Polarkoordinaten ausdrücken:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \quad (2.35)$$

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Zentralkäfte

Wir wollen nun die Bahn des Teilchens explizit bestimmen. Aus Gl. (2.34) folgt zunächst

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^4}. \quad (2.36)$$

Einsetzen in Gl. (2.35) liefert für die Energie

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.37)$$

Diese Gleichung enthält nur noch die Koordinate r und ihre Zeitableitung \dot{r} , so dass wir $r(t)$ durch Integration bestimmen können (s.u.). In diesem Zusammenhang ist es praktisch, das *effektive Potenzial*

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} \quad (2.38)$$

einzuführen. Für die Energie ergibt sich dann

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad (2.39)$$

d.h. die gleiche Form wie die Gesamtenergie bei einer *eindimensionalen* Bewegung mit der kinetischen Energie $T_{1D} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ im Potenzial $V_{1D} = V_{\text{eff}}(r)$. Es sei noch einmal betont, dass der Term

$$V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2, \quad (2.40)$$

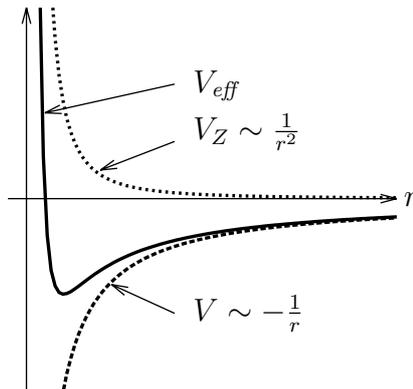
der zusammen mit dem eigentlichen Potenzialterm $V(r)$ das effektive Potenzial bildet, ursprünglich aus der kinetischen Energie kommt und zunächst lediglich auf Grund der Tatsache, dass er nach Ausnutzen der Drehimpulserhaltung nur noch von r abhängt, dem Potenzial zugeordnet werden konnte. Neben diesem eher technischen Argument gibt es aber auch eine physikalische Interpretation. Dazu betrachten wir die mit V_Z verbundene „Kraft“

$$\vec{F}_Z(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_Z(r) = \frac{\vec{L}^2}{mr^3} \vec{e}_r = m r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r. \quad (2.41)$$

Sie wirkt radial nach außen und entspricht einer *Zentrifugalkraft*. V_Z kann daher als *Zentrifugalpotenzial* interpretiert werden, das das Teilchen nach

außen drückt. Insbesondere ist V_Z für $\vec{L} \neq \vec{0}$ überall positiv und divergiert am Ursprung.

Beispiel: $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$, $\kappa > 0$ (z.B. Gravitation: $\kappa = Gm_1m_2$)



kleine r : V_Z dominiert

große r : V dominiert

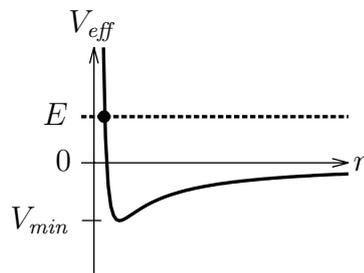
Aus Gl. (2.39) folgt allgemein, dass

$$E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}mr^2 \geq 0, \quad (2.42)$$

d.h. nur solche Werte von r sind möglich, für die $V_{eff}(r) \leq E$ gilt. Diese Werte von r nennt man den *klassisch erlaubten Bereich* und die Punkte, an denen $V_{eff}(r) = E$ gilt, *klassische Umkehrpunkte*. An diesen Punkten gilt $\dot{r} = 0$, und die Radialbewegung ändert ihre Richtung (einwärts \leftrightarrow auswärts).⁶

Als Beispiel betrachten wir wieder das Gravitationspotenzial für $|\vec{L}| > 0$. Wir können dann folgende Fälle unterscheiden:

1. $E > 0$



Umkehrpunkt: r_{min}

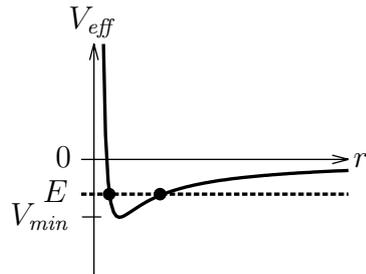
erlaubter Bereich: $r \geq r_{min}$

verbotener Bereich: $r < r_{min}$

⁶In der Quantenmechanik gilt das nicht mehr unbedingt. Dort können sich die Teilchen auch mit endlicher Wahrscheinlichkeit in den klassisch verbotenen Bereichen aufhalten und diese „durchtunneln“.

⇒ Ein aus beliebiger Entfernung einwärts laufendes Teilchen ändert bei $r = r_{min}$ die Richtung der Radialbewegung und entfernt sich bis ins Unendliche.

2. $V_{min} < E < 0$



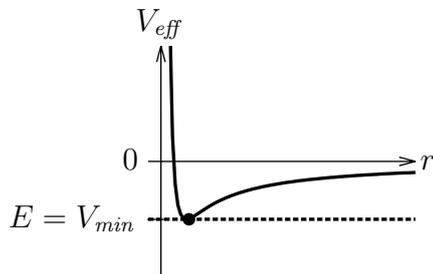
Umkehrpunkte: $r_{min} < r_{max}$

erlaubter Bereich: $r_{min} \leq r \leq r_{max}$

verbotene Bereiche: $r < r_{min},$
 $r > r_{max}$

⇒ Das Teilchen „pendelt“ zwischen r_{min} und r_{max} hin und her. (Wir dürfen aber nicht vergessen, dass es noch die Bewegung in φ -Richtung gibt.)

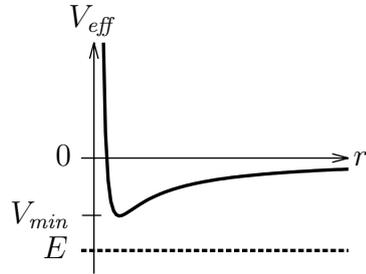
3. $E = V_{min}$



Dies entspricht dem Grenzfall von Fall 2 mit $r_{min} = r_{max} = r_0$.

⇒ Das Teilchen hat einen festen Abstand $r = r_0$. Unter Hinzunahme der Winkelbewegung entspricht dies einer Kreisbahn.

4. $E < V_{min}$



Es gibt keine erlaubte Lösung.

Die Fälle 2 und 3 beschreiben also ein *gebundenes* System, bei dem der Abstand einen Maximalwert r_{max} besitzt, Fall 1 entspricht einem *ungebundenen* System.

Nach dieser allgemeinen Klassifizierung wollen wir nun die Bewegungsgleichung lösen. Dazu lösen wir Gl. (2.39) nach \dot{r} auf,

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}, \quad (2.43)$$

und trennen die Variablen r und t :

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}} \quad (2.44)$$

Integration liefert dann

$$t(r) - t(r_0) = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}}. \quad (2.45)$$

Das Integral kann in manchen Fällen analytisch (s. nächster Abschnitt), in jedem Fall aber numerisch gelöst werden. Das Ergebnis sagt uns, zu welcher Zeit $t(r)$ ein Teilchen den Abstand r vom Koordinatenursprung haben wird (oder, je nach Vorzeichen, gehabt hat), wenn es zur Zeit $t(r_0)$ die Radialkoordinate r_0 besitzt. Wir erhalten also eine Funktion $t(r)$, deren Umkehrung uns die gesuchte Funktion $r(t)$ liefert.

Das unbestimmte Vorzeichen \pm hängt damit zusammen, dass durch die Vorgabe von E und $|\vec{L}|$ nur der Betrag der Radialgeschwindigkeit im Abstand r festgelegt ist, nicht aber die Richtung (für $r > r_0$ entspricht $+$ auswärts und $-$ einwärts). Die Existenz beider Lösungen besagt, dass die Bewegung

von r_0 nach r die gleiche Zeit in Anspruch nimmt wie von r zurück nach r_0 . Darin manifestiert sich die *Zeitumkehrinvarianz* der Bewegungsgleichung: Der „rückwärts laufende Film“ einer Lösung entspricht auch einer Lösung. Wir kommen nun auf die Winkelbewegung zurück. Aus Gl. (2.34),

$$\vec{L} = mr^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad (2.46)$$

folgt zunächst, dass sich das Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ nicht ändert, d.h. der Umlaufsinn bleibt konstant. Wir können das Koordinatensystem so wählen, dass \vec{L} in positive z -Richtung zeigt. Dann ist $\dot{\varphi}$ positiv, d.h. das Teilchen bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn. Mit $L := |\vec{L}|$ gilt dann also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt, \quad (2.47)$$

und somit nach Integration

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \frac{L}{mr^2(t')}. \quad (2.48)$$

Für bekanntes $r(t)$ kann das Integral dann zumindest numerisch gelöst werden.

Oft interessiert uns nur die geometrische Form $r(\varphi)$ der Bahn und nicht das Zeitverhalten $\vec{r}(t)$ des Ortsvektors. Dazu schreiben wir

$$r = r(\varphi(t)), \quad (2.49)$$

woraus mit Hilfe der Kettenregel folgt

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad (2.50)$$

und damit

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}. \quad (2.51)$$

Mit Gl. (2.43) und Gl. (2.47),

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \quad (2.52)$$

folgt daraus

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}, \quad (2.53)$$

also

$$d\varphi = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} \quad (2.54)$$

und damit nach Integration

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}}. \quad (2.55)$$

Wie wir diskutiert haben, oszilliert r für eine gebundene Bewegung zwischen den Umkehrpunkten r_{\min} und r_{\max} . Für eine volle Periode von r_{\min} bis r_{\max} und wieder zurück nach r_{\min} ändert sich φ um

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2m}} \left(\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr' \dots - \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} dr' \dots \right) = \sqrt{\frac{2}{m}} L \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}}. \quad (2.56)$$

Dabei können wir nun folgende Fälle unterscheiden:

- Falls $\Delta\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, bleibt die Richtung von r_{\min} (bei Planeten das „Perihel“ = sonnennächster Punkt) unverändert.
- Falls $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, kommt das Perihel nach m Perioden (bzgl. r) wieder an den Ausgangspunkt zurück. Man nennt die Bahn dann *geschlossen*.
- Andernfalls nennt man die Bahn *offen*.

2.4 Lösung für das Gravitationspotenzial

Wir betrachten jetzt den Spezialfall des Gravitationspotenzials,

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa := G m_1 m_2 = G M m \quad (m \equiv \mu). \quad (2.57)$$

Daraus ergibt sich für das effektive Potenzial

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.58)$$

Dies könnten wir in Gl. (2.55) für die Bahnkurve einsetzen und das Integral lösen. Statt dessen gehen wir einen Schritt zurück zu Gl. (2.53),

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} r^2 \sqrt{E + \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}, \quad (2.59)$$

und substituieren

$$u := \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (2.60)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{du}{d\varphi} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{L} \sqrt{E + \kappa u - \frac{L^2}{2m} u^2} \quad (2.61)$$

und damit

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\kappa}{L^2} u - u^2. \quad (2.62)$$

Wir substituieren noch einmal,

$$w := u - \frac{m\kappa}{L^2}, \quad (2.63)$$

so dass

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} \quad (2.64)$$

und

$$w^2 = u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2} u + \frac{m^2\kappa^2}{L^4}. \quad (2.65)$$

Wir finden also

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = -w^2 + \underbrace{\frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}_{:=A^2} \quad (2.66)$$

und damit

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2. \quad (2.67)$$

Diese Differenzialgleichung hat die Lösung

$$w(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (2.68)$$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten φ_0 .

Beweis:

$$\frac{dw}{d\varphi} = -A \sin(\varphi - \varphi_0) \quad (2.69)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 = A^2 (\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)) = A^2 \quad \text{q.e.d.} \quad (2.70)$$

Wir finden also

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = u = w + \frac{m\kappa}{L^2} &= \sqrt{\frac{m^2\kappa^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\kappa}{L^2} \\ &= \frac{m\kappa}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\kappa^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

und damit

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (2.72)$$

wobei

$$p = \frac{L^2}{m\kappa} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\kappa^2}}. \quad (2.73)$$

Gl. (2.72) ist aus der Geometrie als *Kegelschnittgleichung* bekannt. In Abhängigkeit von der *numerischen Exzentrizität* ε ergeben sich unterschiedliche Bahnkurven:

$$\text{i) } \varepsilon > 1 \quad (\Leftrightarrow E > 0) : \quad \text{Hyperbel} \quad (2.74)$$

$$\text{ii) } \varepsilon = 1 \quad (\Leftrightarrow E = 0) : \quad \text{Parabel} \quad (2.75)$$

$$\text{iii) } \varepsilon < 1 \quad (\Leftrightarrow E < 0) : \quad \text{Ellipse} \quad (2.76)$$

mit dem Grenzfall

$$\varepsilon = 0 \quad (\Leftrightarrow E = -\frac{m\kappa^2}{2L^2}) : \quad \text{Kreis} \quad (2.77)$$

Im Folgenden wollen wir uns den Fall der Ellipse ($\varepsilon < 1$) etwas genauer ansehen (weitere Eigenschaften \rightarrow Übung). Wir können das Koordinatensystem so legen, dass $\varphi_0 = 0$ gilt, d.h.

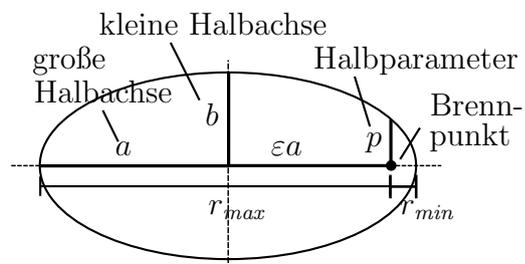
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (2.78)$$

Es gilt dann

$$r(0) = \frac{p}{1 + \varepsilon} = r_{min}, \quad (2.79)$$

$$r(\pi) = \frac{p}{1 - \varepsilon} = r_{max}, \quad (2.80)$$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = p. \quad (2.81)$$



Damit folgt für die große Halbachse:

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} \quad (2.82)$$

$$\Rightarrow a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{L^2}{m\kappa} \left(-\frac{m\kappa^2}{2L^2E} \right) = -\frac{\kappa}{2E} = \frac{\kappa}{2|E|}, \quad (2.83)$$

d.h. Bahnen gleicher Energie haben die gleiche große Halbachse. Andererseits hatten wir $p = \frac{L^2}{m\kappa}$, d.h. Bahnen mit gleichem Drehimpuls haben den gleichen Halbparameter. Beides gilt jeweils bei gleichem κ , d.h. für gleiche Massen. Für die kleine Halbachse gilt (\rightarrow Übung)

$$b^2 = ap \quad (2.84)$$

und für den Flächeninhalt der Ellipse

$$A = \pi ab. \quad (2.85)$$

Im Zusammenhang mit dem zweiten Kepler'schen Gesetz hatten wir gefunden (s. Gl. (2.25)):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Leftrightarrow dA = \frac{L}{2m} dt. \quad (2.86)$$

Integration über einen vollen Umlauf mit der Umlaufzeit T liefert

$$A = \int_{\text{Ellipse}} dA = \int_0^T dt \frac{L}{2m} = \frac{L}{2m} T \Rightarrow T = \frac{2m}{L} A. \quad (2.87)$$

Mit Gl. (2.85) und Gl. (2.84) folgt daraus

$$T = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi \sqrt{p} a^{3/2}, \quad (2.88)$$

und mit Gl. (2.73),

$$p = \frac{L^2}{m\kappa} = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad (2.89)$$

erhalten wir schließlich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}. \quad (2.90)$$

\rightarrow Drittes Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen.

Wie man an Gl. (2.90) sieht, gilt das Gesetz nicht exakt, da der Proportionalitätsfaktor die Gesamtmasse $M = m_{\odot} + m_{\text{Planet}}$ enthält und damit für verschiedene Planeten unterschiedlich ist. Da jedoch die Planetenmassen gegenüber der Sonnenmasse sehr klein sind, war dieser Unterschied anhand der Kepler vorliegenden Daten nicht erkennbar.

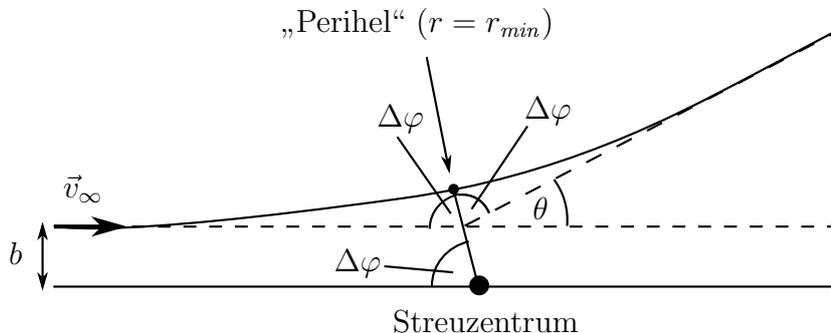
2.5 Streuung im Zentralkraftfeld

In einem Streuexperiment wird ein Teilchenstrahl („Projektile“) auf andere Teilchen („Target“) gerichtet und durch die Wechselwirkung abgelenkt. Aus der Winkelverteilung der auf diese Weise gestreuten Teilchen kann man dann Rückschlüsse über die Wechselwirkung ziehen.

Wir betrachten dazu zunächst die Streuung eines einzelnen Projektil-Teilchens an einem einzelnen Target-Teilchen unter dem Einfluss einer zentralen Zweiteilchen-Kraft. Wie wir gesehen haben, können wir das durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung auf ein äquivalentes Einteilchen-Problem für die Relativbewegung reduzieren, bei dem ein Teilchen mit reduzierter Masse μ an einem Zentralpotenzial $V(r)$ gestreut wird.

Betrachten wir dazu ein Teilchen, das sich aus großer Entfernung mit Anfangsgeschwindigkeit v_∞ dem Streuzentrum nähert. Wir nehmen an, dass die Kraft in großer Entfernung vernachlässigt werden kann, so dass sich das Teilchen zunächst geradlinig bewegt. In der Nähe des Streuzentrums wird die Kraft spürbar, und das Teilchen wird abgelenkt. Es entfernt sich dann wieder und bewegt sich am Ende wieder geradlinig.

Daraus ergibt sich das folgende Bild:



Die Größe b , also den Abstand zwischen Streuzentrum und der geraden Linie, auf der sich das Teilchen ohne Kraftereinwirkung fortbewegen würde, bezeichnet man als *Stoßparameter*, θ ist der *Streuwinkel*.

Wenn wir das Potenzial im Unendlichen gleich null setzen, gilt für die Energie

$$E = T_\infty = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 \quad (2.91)$$

und für den Drehimpuls

$$L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = b\mu v_\infty = b\sqrt{2\mu E}. \quad (2.92)$$

Im vorletzten Schritt haben wir verwendet, dass nur die senkrecht auf \vec{v} stehende Komponente von \vec{r} zum Kreuzprodukt beiträgt und dass diese für das einlaufende Teilchen gerade gleich b ist.

Für den Streuwinkel gilt (s. Bild)

$$\theta = \pi - 2\Delta\varphi, \quad (2.93)$$

wobei $\Delta\varphi$ gerade der Differenz zwischen dem Polarwinkel des Teilchens im Perihel und dem in großer Entfernung ist:

$$\Delta\varphi = |\varphi(r_{min}) - \varphi(r \rightarrow \infty)| \quad (2.94)$$

Für diese gilt nach Gl. (2.55)

$$\Delta\varphi = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V_{eff}(r)}{E}}}. \quad (2.95)$$

Mit

$$V_{eff} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = V + \frac{Eb^2}{r^2} \quad (2.96)$$

folgt daraus

$$\Delta\varphi = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}} \quad (2.97)$$

und damit

$$\theta(b) = \pi - 2b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}. \quad (2.98)$$

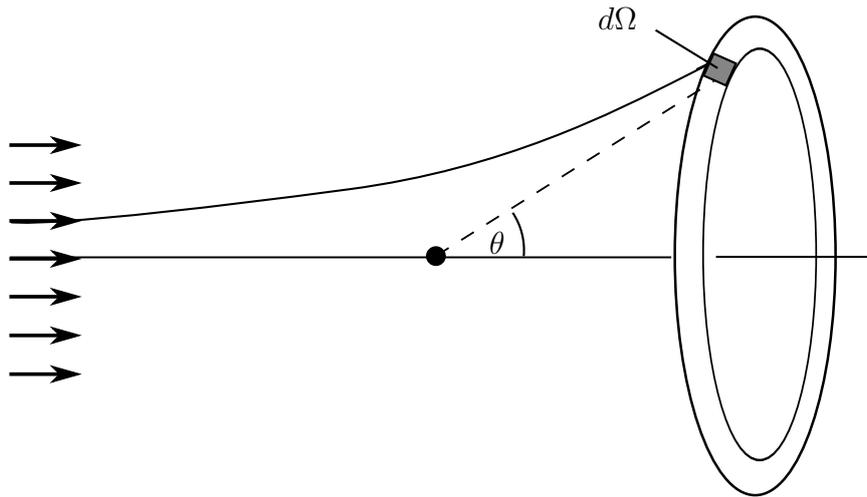
Dabei ist zu beachten, dass r_{min} i.A. ebenfalls von E und b abhängt.

Für vorgegebene Werte von E und b könnten wir also für bekanntes $V(r)$ den Streuwinkel θ vorhersagen (oder umgekehrt durch Messung von θ Rückschlüsse über das Potenzial ziehen). In realen Streuexperimenten, insbesondere in der Kern- und Elementarteilchenphysik, ist es aber nicht möglich, b präzise genug vorzugeben (\sim fm). Zu den technischen Herausforderungen kommen dabei noch prinzipielle Gründe aus der Quantenmechanik hinzu. Anstatt b vorzugeben mittelt man daher über viele verschiedene Stoßparameter, indem man einen Teilchenstrahl mit konstanter *Teilchenstromdichte*

$$j = \frac{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \quad (2.99)$$

auf das Target richtet. Dabei haben die Teilchen alle die gleiche Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_∞ , und die Fläche liegt senkrecht dazu. Man misst dann

$$dN = \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}} \quad (2.100)$$



und definiert

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{dN}{j} \\ &= \frac{\text{Zahl der in das Raumwinkelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Zeit}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Da die Zeit herausfällt, hat $d\sigma$ die Dimension einer Fläche. Man schreibt dann

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.102)$$

und bezeichnet die Größe $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ als *differentiellen Wirkungsquerschnitt*. Integriert man diesen über den gesamten Raumwinkel, erhält man den *totalen Wirkungsquerschnitt*

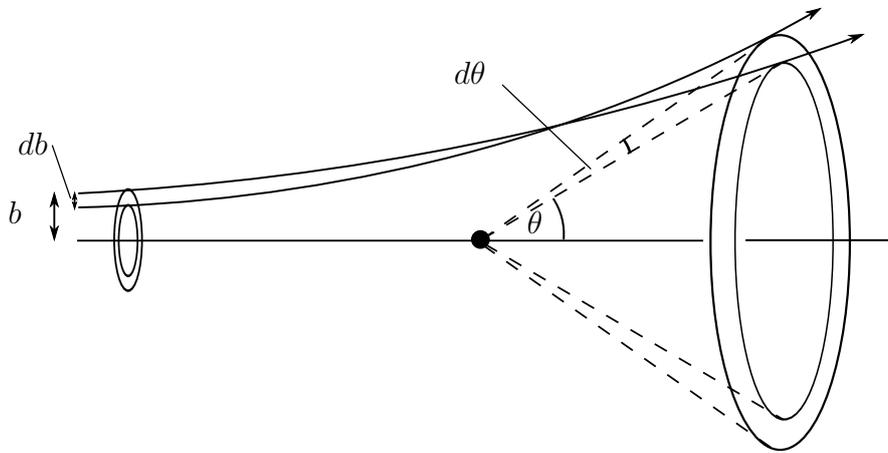
$$\sigma := \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (2.103)$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie der Zentralkraft ist das Problem axialsymmetrisch um die Strahlachse. Wir können das Raumwinkelement $d\Omega$ daher zu

einem schmalen Ring ausweiten, indem wir über den Azimutalwinkel integrieren:⁷

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta d\theta = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (2.104)$$

Wie wir in Gl. (2.98) gesehen haben, gibt es einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel θ . Die Teilchen, die in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreut werden, sind daher durch einen Ring eingelaufen, der durch die Stoßparametern b und $b + db$ begrenzt wird:



Die Zahl dN der pro Zeit in das Raumwinkelintervall $d\Omega$ gestreuten Teilchen ist daher gleich der Zahl der Teilchen, die pro Zeit durch diesen Ring laufen, die wiederum durch j mal die Fläche des Rings, $2\pi b|db|$ gegeben ist:

$$dN = j \cdot 2\pi b |db|. \quad (2.105)$$

Dabei haben wir den Betrag von db gebildet, weil i.A. größere Streuwinkel durch kleinere Stoßparameter erzielt werden, so dass db für positive $d\theta$ negativ ist (s. Abbildung). Aus Gl. (2.101) folgt dann

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi b |db|, \quad (2.106)$$

⁷Achtung: Wir verwenden jetzt ein anderes Koordinatensystem als vorher bei der Planetenbewegung oder der Streuung eines einzelnen Teilchens. Dort konnten wir uns auf eine Ebene beschränken und zweidimensionale Polarkoordinaten verwenden. Jetzt betrachten wir wieder den dreidimensionalen Raum und identifizieren die Richtung des einlaufenden Strahls mit der z -Richtung. Der zuvor eingeführte Streuwinkel θ entspricht dann genau dem θ -Winkel in Kugelkoordinaten. Der zugehörige Azimutalwinkel φ hat dagegen nichts mit dem vorher verwendeten Winkel φ in zweidimensionalen Polarkoordinaten zu tun.

d.h. die Teilchenstromdichte fällt heraus, und nur die Fläche des Kreisrings bleibt übrig. $d\sigma$ kann daher geometrisch als der Flächeninhalt des Flächenelements interpretiert werden, durch das die Teilchen einlaufen, die in das Raumwinkelement $d\Omega$ gestreut werden.

Mit Gl. (2.104) ergibt sich dann für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b |db|}{2\pi \sin\theta d\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (2.107)$$

Die Ableitung $\frac{db}{d\theta}$ bekommt man aus der Funktion $b(\theta)$, die man durch Umkehrung der Funktion $\theta(b)$, Gl. (2.98), konstruieren kann.

Beispiel: Rutherford-Streuung

Für das Coulomb-Potenzial

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \equiv -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa := -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.108)$$

ergibt sich (nach längerer Rechnung)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\kappa^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (\text{Rutherford'sche Streuformel}). \quad (2.109)$$

Mit dieser Formel erzielte Rutherford 1911 eine gute Beschreibung der experimentellen Daten für die Streuung von α -Teilchen an Gold und schloss daraus auf die Existenz des Atomkerns. Dabei hatte er allerdings das „Glück“, dass die eigentlich anzuwendende (aber damals noch unbekannt) quantenmechanische Formel für Coulomb-Streuung in sehr guter Näherung mit dem klassischen Ergebnis übereinstimmt.

Kapitel 3

Der starre Körper

3.1 Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers

Bislang haben wir hauptsächlich die Bewegung einzelner oder mehrerer Punktmassen diskutiert. Wir wollen uns jetzt der Beschreibung ausgedehnter Körper zuwenden. Grundsätzlich kann man sich diese wiederum aus N punktförmigen Teilchen (z.B. Atomen oder Molekülen) zusammengesetzt vorstellen, wobei $N \sim 10^{23}$ eine sehr große Zahl ist. Oft ist es daher zweckmäßiger, von einer kontinuierlichen Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ auszugehen. Für die Gesamtmasse des Körpers ergibt sich dann z.B.

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \xrightarrow{\text{kontin.}} \int d^3r \rho(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Wir werden im Folgenden zwischen beiden Beschreibungen hin und her wechseln.⁸

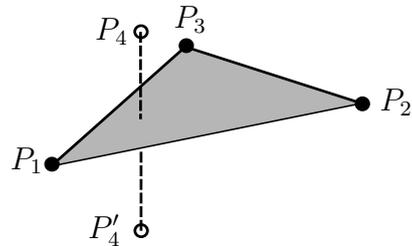
Im Allgemeinen müssen zur vollständigen Beschreibung des Körpers zu jedem Zeitpunkt die Koordinaten aller N Punktmassen bzw. die vollständige Dichtefunktion $\rho(\vec{r})$ angegeben werden. Die Situation vereinfacht sich jedoch drastisch, wenn wir von *starren*, d.h. nicht-deformierbaren Körpern ausgehen. Diese sind durch die Eigenschaft definiert, dass die Abstände zweier beliebiger Punkte des Körpers zeitlich konstant bleiben:

$$r_{ij}(t) = |\vec{r}^{(i)}(t) - \vec{r}^{(j)}(t)| = c_{ij} = \text{const.} \quad (3.2)$$

⁸Mit Hilfe der δ -Funktion kann man die Dichte $\rho(\vec{r})$ auch für diskrete Punktmassen angeben. Im Zusammenhang mit Ladungsdichten werden wir von dieser Möglichkeit im zweiten Teil der Vorlesung häufiger Gebrauch machen.

Wieviele *Freiheitsgrade* besitzt ein solcher Körper, d.h. wieviele Koordinatenangaben sind nötig, seine Lage im Raum eindeutig festzulegen? Betrachten wir dazu einen Punkt P_1 des Körpers. Dieser kann sich an einem beliebigen Ort $\vec{r}^{(1)}$ befinden, für dessen Festlegung drei Koordinaten erforderlich sind. Die Lage $\vec{r}^{(2)}$ eines zweiten Punktes P_2 ist dann durch den Abstand $r_{12} = c_{12}$ von P_1 eingeschränkt: Er muss auf der Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $\vec{r}^{(1)}$ und Radius c_{12} liegen. Zur genauen Festlegung seiner Lage genügen also zwei Koordinaten, z.B. zwei Winkel. Ein dritter Punkt P_3 muss dann auf der Schnittlinie zweier Kugeloberflächen mit den Mittelpunkten $\vec{r}^{(1)}$ bzw. $\vec{r}^{(2)}$ und Radien c_{13} bzw. c_{23} liegen, was einen Kreisring ergibt. Zur Festlegung seiner Lage ist also nur noch eine Koordinate (z.B. ein Winkel) erforderlich.

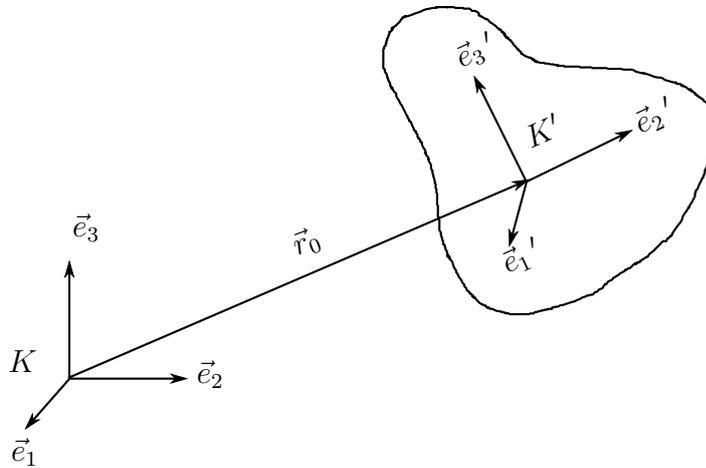
Die Lage eines vierten Punktes P_4 ist dann durch die Abstände $r_{i4} = c_{i4}$, $i = 1, 2, 3$, fast vollständig festgelegt: Es gibt nur noch zwei Möglichkeiten, die durch Spiegelung an der durch $\vec{r}^{(1)}$, $\vec{r}^{(2)}$ und $\vec{r}^{(3)}$ definierten Ebene in einander überführt werden können.



Die Uneindeutigkeit lässt sich dadurch aufheben, dass wir außer der Konstanz der Abstände noch eine feste relative Orientierung fordern.⁹ Dies ist keine echte Einschränkung, da der Übergang von P_4 in sein Spiegelbild einen diskontinuierlichen Sprung seiner Position bedeuten würde, der in der klassischen Physik, insbesondere nach den Newton'schen Gesetzen, nicht möglich ist.

Die Lage des starren Körpers im Raum ist also durch $3 + 2 + 1 = 6$ unabhängige Koordinaten eindeutig festgelegt: Er besitzt sechs Freiheitsgrade. Zur Interpretation dieser Freiheitsgrade betrachten wir zwei kartesische Koordinatensysteme, ein *raumfestes* Koordinatensystem K , das ein Inertialsystem beschreibt, sowie ein *körperfestes* Koordinatensystem K' , also ein Koordinatensystem, das fest im Körper verankert ist und sich mit dem Körper mitbewegt. Insbesondere sind die Koordinaten aller Punkte des Körpers in K' zeitlich konstant.

⁹Formal bedeutet dies, dass das Vorzeichen des Spatprodukts $\vec{r}_{14} \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13})$ zeitlich konstant ist.



Die Lage des starren Körpers zur Zeit t im Koordinatensystem K lässt sich dann eindeutig durch

- den Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$ des Ursprungs von K' (= drei Koordinaten)
- die Richtungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1'(t)$ (zwei Winkel) und $\vec{e}_2'(t)$ (ein Winkel)

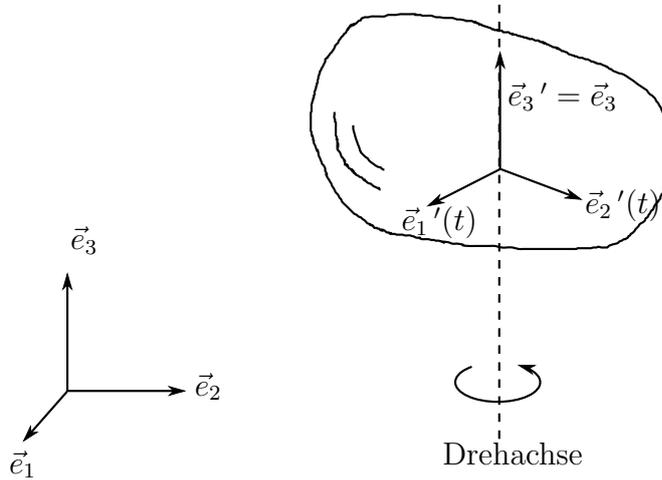
beschreiben. Dies entspricht drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgraden:

- *Translation:*
Verschiebung des (fest im Körper verankerten) Ursprungs von K'
- *Rotation:*
Richtungsänderung der (fest im Körper verankerten) Koordinatenachsen von K'

3.2 Rotation um eine körperfeste Achse

Im Allgemeinen kann sich die Rotationsachse eines starren Körpers zeitlich ändern. Wir beginnen jedoch mit der Diskussion des einfacheren Falls, dass der Körper um eine feste Achse rotiert. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass nach Abzug der Translationsbewegung die Drehung des Koordinatensystems K' um eine Achse erfolgt, die fest im Körper verankert ist. Oft bietet es sich

dann an, die Richtung der Achse mit \vec{e}_3' und, da sie sich nicht ändert, auch mit \vec{e}_3 zu identifizieren (s. Bild).



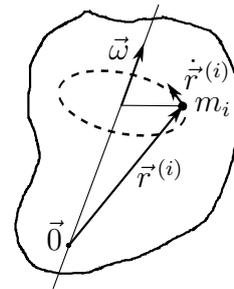
3.2.1 Raumfeste Achse

Wir setzen zunächst zusätzlich voraus, dass die Drehachse raumfest ist, d.h. es gibt keine Translationsbewegung. Das System besitzt dann nur einen Freiheitsgrad: den Drehwinkel φ .

Wir können ein Koordinatensystem wählen, bei dem die Drehachse durch den Koordinatenursprung von K verläuft und die Richtung \vec{n} besitzt. Die Rotation wird dann durch die *Winkelgeschwindigkeit*

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n}, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad (3.3)$$

charakterisiert. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dann ein Massenpunkt m_i des Körpers, der sich am Ort $\vec{r}^{(i)}$ befindet?



Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir in einem ersten Schritt zusätzlich an, dass die Drehung um die z -Achse verläuft, d.h. $\vec{n} = \vec{e}_3$. Wir können dann Zylinderkoordinaten verwenden, so dass der Vektor $\vec{r}^{(i)}$ durch

$$\vec{r}^{(i)} = \rho^{(i)} \vec{e}_\rho + z^{(i)} \vec{e}_z \quad (3.4)$$

gegeben ist. Für die Geschwindigkeit gilt dann allgemein

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \dot{\rho}^{(i)} \vec{e}_\rho + \rho^{(i)} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}^{(i)} \vec{e}_z = \dot{\rho}^{(i)} \vec{e}_\rho + \rho^{(i)} \dot{\varphi}^{(i)} \vec{e}_\varphi + \dot{z}^{(i)} \vec{e}_z \quad (3.5)$$

(vgl. 1. Übung). Für Punkte auf dem rotierenden Körper gilt jedoch

$$\dot{\rho}^{(i)} = \dot{z}^{(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}^{(i)} = \omega, \quad (3.6)$$

da sie sich alle mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse bewegen und dabei weder ihre Höhe noch den Abstand von der Achse ändern. Wir finden also

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \omega \rho^{(i)} \vec{e}_\varphi. \quad (3.7)$$

Aus $\vec{\omega} = \omega \vec{n} = \omega \vec{e}_z$ folgt andererseits

$$\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega \rho^{(i)} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho}_{=\vec{e}_\varphi} + \omega z^{(i)} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_z}_{=\vec{0}} = \omega \rho^{(i)} \vec{e}_\varphi, \quad (3.8)$$

d.h. es gilt

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} = \omega (\vec{n} \times \vec{r}^{(i)}). \quad (3.9)$$

Dabei ist anzumerken, dass dieses Ergebnis allein durch die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{r}^{(i)}$ ausgedrückt werden kann, ohne dass dabei auf ein konkretes Koordinatensystem Bezug genommen werden muss. Obwohl wir es in einem speziellen Koordinatensystem mit $\vec{n} = \vec{e}_3$ hergeleitet haben, gilt es daher ganz allgemein, also auch wenn die Drehachse nicht in die z -Richtung zeigt.¹⁰

Aufbauend auf diesem Ergebnis wollen wir nun die Rotationsenergie des Körpers berechnen. Da keine Translationsbewegung vorhanden ist, ist diese gleich der gesamten kinetischen Energie (vgl. Gl. (1.79)),

$$T_{rot} = T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)2}. \quad (3.10)$$

Einsetzen von Gl. (3.9) liefert

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{n} \times \vec{r}^{(i)})^2 \omega^2. \quad (3.11)$$

Es bietet sich an, dies in der Form

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (3.12)$$

¹⁰ Mathematisch hängt dies mit den Transformationseigenschaften von Vektoren unter Drehungen zusammen. Alternativ kann man sich Gl. (3.9) auch anhand des Bildes am Anfang des Abschnitts geometrisch überlegen.

zu schreiben, wobei

$$J = \sum_i m_i (\vec{n} \times \vec{r}^{(i)})^2 \quad (3.13)$$

das *Trägheitsmoment* des Körpers bzgl. der vorgegebenen Drehachse ist. Für den Spezialfall $\vec{n} = \vec{e}_3$ erhält man

$$J = \sum_i m_i (x^{(i)2} + y^{(i)2}). \quad (3.14)$$

Im Fall einer kontinuierlichen Massenverteilung müssen wir einfach die Summe durch ein Integral über den Raum und die Einzelmassen durch die Massendichte ersetzen, d.h. es ergibt sich

$$J = \int d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{n} \times \vec{r})^2 \stackrel{\vec{n}=\vec{e}_3}{=} \int d^3r \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2). \quad (3.15)$$

Wirken auf den Körper zusätzlich konservative äußere Kräfte, können diese von einem Potenzial abgeleitet werden, das nur von φ (dem einzigen Freiheitsgrad) abhängen kann. Es gilt dann der Energiesatz

$$E = T_{rot} + V = \frac{1}{2} J \omega^2 + V = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = const. \quad (3.16)$$

Daraus folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{J} (E - V(\varphi))}. \quad (3.17)$$

Trennung der Variablen und Integration liefert dann

$$t(\varphi) - t(\varphi_0) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{J} (E - V(\varphi'))}} \quad (3.18)$$

und somit $\varphi(t)$ durch Umkehrung.

Als nächstes wollen wir den Drehimpuls berechnen. Wie bei der kinetischen Energie gehen wir wieder von dem Ausdruck für allgemeine N -Teilchen-Systeme aus und verwenden dann Gl. (3.9):

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}^{(i)} \times m_i \dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_i m_i \vec{r}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)}) \quad (3.19)$$

Mit Hilfe der Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ für das doppelte Kreuzprodukt folgt daraus

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i)2} \vec{\omega} - (\vec{r}^{(i)} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}^{(i)} \right). \quad (3.20)$$

Ein interessanter Aspekt ist dabei, dass \vec{L} wegen des zweiten Terms in der Klammer i.A. nicht parallel zu $\vec{\omega}$ ist. Insbesondere bedeutet dies, dass sich die Richtung des Drehimpulses bei festgehaltener Drehachse während der Rotation i.A. ändert. Das wiederum heißt, dass die Befestigung der Drehachse ein Drehmoment ausübt, das die Änderung des Drehimpulses bewirkt. Daneben kann es natürlich auch noch weitere Drehmomente geben, z.B. durch die Schwerkraft, die auf die Massenpunkte des Rotators wirkt.

Wie wir in Abschnitt 1.4.2 gesehen haben, gilt allgemein

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ex} = \sum_i \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)}. \quad (3.21)$$

Die Kräfte $\vec{F}_{ex}^{(i)}$ beinhalten dabei auch die „Zwangskräfte“, die erforderlich sind, die Drehachse im Raum fest zu halten. Ein Problem dabei ist, dass nicht von vornherein klar ist, wie groß diese Kräfte sind: Sie sind gerade so groß, dass das resultierende Drehmoment die Drehachse stabilisiert. Mit Problemen dieser Art werden wir uns im nächsten Kapitel noch genauer befassen. In unserem Fall setzten sich die Zwangskräfte aus den Zentripetalkräften $\vec{F}_Z^{(i)}$ zusammen, die die einzelnen Massenpunkte auf ihrer jeweiligen Kreisbahn halten und in Richtung Drehachse zeigen. Betrachten wir wieder den Spezialfall $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Dann gilt in Zylinderkoordinaten

$$\vec{F}_Z^{(i)} = -F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho. \quad (3.22)$$

Zusammen mit Gl. (3.4) ergibt sich dann für das entsprechende Drehmoment

$$\vec{N}_Z^{(i)} = \vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_Z^{(i)} = -\rho^{(i)} F_Z^{(i)} \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho - z^{(i)} F_Z^{(i)} \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = -z^{(i)} F_Z^{(i)} \vec{e}_\varphi. \quad (3.23)$$

Da \vec{e}_φ von $\varphi^{(i)}$ abhängt, zeigen die verschiedenen $\vec{N}_Z^{(i)}$ in unterschiedliche Richtungen. Sie liegen aber alle in der xy -Ebene. Es folgt daraus, dass das Gesamt-Drehmoment, das aus den Zwangskräften resultiert, ebenfalls in der xy -Ebene liegt und damit senkrecht zur Drehachse steht. Insbesondere verschwindet die Komponente in $\vec{\omega}$ -Richtung.

Wir konzentrieren uns daher im Folgenden auf die Drehimpulskomponente parallel zu $\vec{\omega}$, die also nicht durch die Zwangskräfte beeinflusst wird:

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i)} \times \dot{\vec{r}}^{(i)} \right) \cdot \vec{n} = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)} \right) \cdot \dot{\vec{r}}^{(i)} \quad (3.24)$$

Dabei haben wir verwendet, dass man die Vektoren beim Spatprodukt zyklisch vertauschen darf, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$. Einsetzen von Gl. (3.9) liefert dann

$$L_n = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)} \right) = \sum_i m_i \left(\vec{n} \times \vec{r}^{(i)} \right)^2 \omega, \quad (3.25)$$

wobei der ω -unabhängige Anteil genau das Trägheitsmoment ist, vgl. Gl. (3.13).
Es gilt also

$$L_n = J\omega = J\dot{\varphi}. \quad (3.26)$$

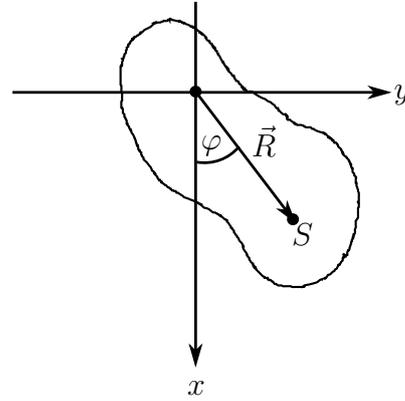
Für die Zeitableitung folgt damit

$$\frac{dL_n}{dt} = J\ddot{\varphi} = N_{ex,n} = \sum_i \left(\vec{r}^{(i)} \times \vec{F}_{ex}^{(i)} \right) \cdot \vec{n}. \quad (3.27)$$

Dabei brauchen wir nur die „freien“ externen Kräfte zu berücksichtigen, da die Zwangskräfte nicht zu $N_{ex,n}$ beitragen.

Beispiel: Physikalisches Pendel

Ein *physikalisches Pendel* ist ein starrer Körper im Schwerfeld der Erde, der um eine horizontale Achse drehbar ist. Um die Drehachse weiterhin in die z -Richtung zeigen zu lassen, wählen wir das nebenstehend abgebildete Koordinatensystem.



Für die externen Kräfte gilt dann

$$\vec{F}_{ex}^{(i)} = m_i g \vec{e}_x = m_i g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

und damit für das externe Drehmoment

$$N_{ex,n} = \sum_i m_i g \left[\begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \sum_i m_i g y^{(i)}. \quad (3.29)$$

Vergleich mit dem Schwerpunktsvektor $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}^{(i)}$ liefert

$$N_{ex,n} = -MgR_y. \quad (3.30)$$

Wie oben dargestellt, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die Drehachse durch den Koordinatenursprung verläuft und die z -Komponente des

Schwerpunkts verschwindet,

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Aus Gl. (3.27) folgt dann die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\varphi} = -MgR \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{MgR}{J} \sin \varphi = 0. \quad (3.32)$$

Alternativ können wir das auch über den Energiesatz herleiten. Für die potenzielle Energie gilt in unserem Koordinatensystem

$$V = \sum_i V^{(i)} = - \sum_i m_i g x^{(i)} = -MgR_x = -MgR \cos \varphi \quad (3.33)$$

und für die kinetische Energie nach Gl. (3.12)

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (3.34)$$

d.h. wir haben

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - MgR \cos \varphi = \text{const.} \quad (3.35)$$

Ableiten nach der Zeit,

$$\frac{dE}{dt} = J \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + MgR \sin \varphi \dot{\varphi} = (J \ddot{\varphi} + MgR \sin \varphi) \dot{\varphi} = 0, \quad (3.36)$$

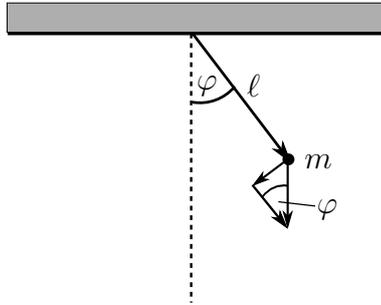
führt dann auf die Bewegungsgleichung

$$J \ddot{\varphi} + MgR \sin \varphi = 0, \quad (3.37)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (3.32).¹¹

Interessant ist auch ein Vergleich mit dem *mathematischen Pendel*, d.h. einem Fadenpendel, bei dem die Masse des Fadens vernachlässigt werden kann.

¹¹Die zweite Lösung von Gl. (3.36), $\dot{\varphi} = 0$, d.h. $\varphi = \text{const.}$, erhält zwar trivial die Energie, ist aber physikalisch offensichtlich nicht sinnvoll. Dies zeigt, dass Energieerhaltung zwar meistens eine notwendige aber nicht immer eine hinreichende Bedingung ist, die richtige Lösung zu finden.



Mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes folgt in diesem Fall

$$m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad (3.38)$$

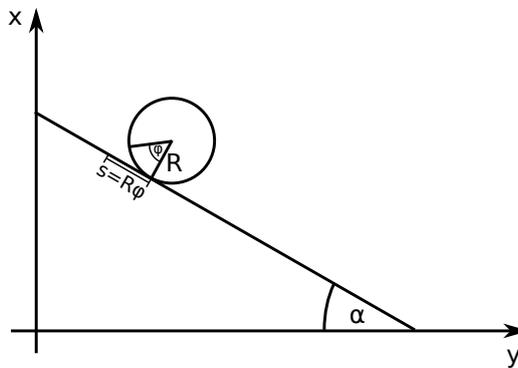
$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (3.39)$$

d.h. das physikalische Pendel entspricht einem mathematischen Pendel mit Fadenlänge $\ell = \frac{J}{MR}$.

3.2.2 Rollbewegung

Wir betrachten einen Zylinder mit Radius R , der eine schiefe Ebene herunter rollt.

Die Massenverteilung sei zylindersymmetrisch, so dass der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse liegt. Wir können dann ein körperfestes Koordinatensystem wählen, dessen Ursprung auf der Symmetrieachse liegt und dessen z -Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt. Diese ist dann auch die Drehachse, die folglich körperfest, aber nicht raumfest ist.



Wir nehmen an, dass der Zylinder perfekt abrollt, so dass die Bewegung durch den Drehwinkel φ parametrisiert werden kann. Für den Schwerpunktsvektor gilt dann¹²

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) \quad (3.40)$$

¹²Um Verwechslungen mit dem Radius R zu vermeiden, nennen wir den Schwerpunktsvektor hier \vec{r}_0 .

mit

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} R \varphi(t). \quad (3.41)$$

Die Position eines beliebigen Zylinderpunktes kann dann im raumfesten Koordinatensystem geschrieben werden als

$$\vec{r}^{(i)}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}^{(i)'}(t) = \vec{r}_0(0) + \vec{s}(t) + \vec{r}^{(i)'}(t). \quad (3.42)$$

$\vec{r}^{(i)'}(t)$ ist also der Ortsvektor des Punktes relativ zum Schwerpunkt, d.h. aus Sicht eines Beobachters, der die Translationsbewegung des Schwerpunkts mitmacht, nicht aber die Drehbewegung des Zylinders. $\vec{r}^{(i)'}(t)$ entspricht daher der Drehbewegung um eine feste Achse, wie in Abschnitt 3.2.1 besprochen. Für die kinetische Energie des Zylinders ergibt sich dann, dass sie in einen reinen Translations- und einen reinen Rotationsanteil zerlegt werden kann:

$$T = T_{trans} + T_{rot} \quad (3.43)$$

mit

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{s}}^2 \quad (3.44)$$

und

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2. \quad (3.45)$$

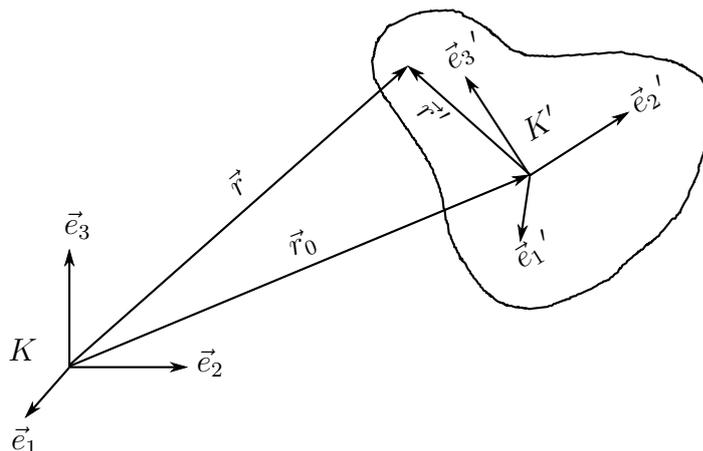
Dabei ist entscheidend, dass der Vektor \vec{r}_0 der Schwerpunktsvektor ist, da man andernfalls noch einen Mischterm bekommen würde. Dies wird in den Hausübungen für den analogen Fall rollender Kugeln gezeigt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einmal die Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung (mit jeweils einem Freiheitsgrad) aufzeigen, indem wir die Bewegung einer Punktmasse in einer Dimension dem Rotator mit raumfester Achse gegenüberstellen:

Punktmasse		Rotator	
Ort	x	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschw.	$\omega = \dot{\varphi}$
Masse	m	Trägheitsmoment	J
kinetische Energie	$T = \frac{1}{2} m v^2$	kinetische Energie	$T = \frac{1}{2} J \omega^2$
Impuls	$p = m v$	Drehimpuls	$L_n = J \omega$
Kraft	$F = \dot{p} = m \ddot{x}$	Drehmoment	$N_n = \dot{L}_n = J \ddot{\varphi}$

3.3 Kinematik des starren Körpers

Wir kommen noch einmal auf unser Bild mit dem raumfesten Koordinatensystem K und dem körperfesten Koordinatensystem K' zurück:



Ein Vektor \vec{r} in K entspricht dann einem Vektor \vec{r}' in K' , und es gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t), \quad (3.46)$$

wobei \vec{r}_0 wieder der in K gemessene Orstvektor des Koordinatenursprungs von K' ist (nicht notwendiger Weise der Schwerpunkt des Körpers).

Wir entwickeln nun $\vec{r}(t)$ nach den Basisvektoren von K ,

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \vec{e}_i, \quad (3.47)$$

und $\vec{r}'(t)$ nach den Basisvektoren von K' ,

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^3 r'_i(t) \vec{e}'_i(t). \quad (3.48)$$

r'_i sind also die in K' gemessenen Koordinaten des Punktes, der in K die Koordinaten r_i besitzt. Dabei ist zu beachten, dass die Basisvektoren \vec{e}'_i mit dem Körper mitrotieren und daher i.A. von der Zeit abhängen.¹³ Rotiert der

¹³Genauer gesagt: Die Basisvektoren \vec{e}'_i von K' hängen in K von der Zeit ab. Umgekehrt hängen die Basisvektoren \vec{e}_i von K in K' von der Zeit ab. Der entscheidende Unterschied zwischen den beiden Koordinatensystemen ist jedoch, dass es sich bei K um ein Inertialsystem handelt, bei K' i.A. dagegen nicht, so dass die Newton'schen Gesetze nur in K gelten. Wenn nichts anderes gesagt wird, beziehen wir uns daher immer auf K als das „physikalischere“ Koordinatensystem.

starre Körper mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ um eine Achse \vec{n} durch den Ursprung von K' , gilt gemäß Gl. (3.9)

$$\dot{\vec{e}}_i' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i'. \quad (3.49)$$

Es folgt damit für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' \\ &= \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\dot{r}_i' \vec{e}_i' + r_i' \dot{\vec{e}}_i' \right) \\ &= \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i' \vec{e}_i' + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 r_i' \vec{e}_i' \\ &= \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned} \quad (3.50)$$

mit

$$\vec{v}_0 := \dot{\vec{r}}_0 \quad (\text{Geschwindigkeit der Translationsbewegung}), \quad (3.51)$$

$$\vec{v}' := \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i' \vec{e}_i' \quad (\text{in } K' \text{ gemessene Geschwindigkeit des Teilchens}) \quad (3.52)$$

und dem Zusatzterm $\vec{\omega} \times \vec{r}'$, der mit der Rotation von K' zusammenhängt. Durch nochmaliges Ableiten ergibt sich dann für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2\dot{r}_i' \dot{\vec{e}}_i' + r_i' \ddot{\vec{e}}_i' \right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2\dot{r}_i' \vec{\omega} \times \vec{e}_i' + r_i' \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{e}_i') \right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2\dot{r}_i' \vec{\omega} \times \vec{e}_i' + r_i' \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_i' + r_i' \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i') \right) \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit

$$\vec{a}_0 := \ddot{\vec{r}}_0 \quad (\text{Beschleunigung der Translationsbewegung}), \quad (3.54)$$

$$\vec{a}' := \sum_{i=1}^3 \ddot{r}_i' \vec{e}_i' \quad (\text{in } K' \text{ gemessene Beschleunigung des Teilchens}), \quad (3.55)$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (\text{Coriolis-Beschleunigung}), \quad (3.56)$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (\text{Zentrifugalbeschleunigung}) \quad (3.57)$$

und dem Term $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$, der bei nicht-konstanter Frequenz oder Drehachse auftritt.

Bislang war \vec{r} der Ortsvektor eines beliebigen Punktes. Wenn es sich dabei um einen Punkt $\vec{r}^{(i)}$ des starren Körpers handelt, verschwinden seine in K' gemessene Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\vec{v}^{(i)'} = \vec{a}^{(i)'} = \vec{0}. \quad (3.58)$$

Gl. (3.57) und Gl. (3.57) vereinfachen sich dann folgendermaßen:

$$\vec{v}^{(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'}, \quad (3.59)$$

$$\vec{a}^{(i)} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{(i)'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'}). \quad (3.60)$$

3.4 Der Trägheitstensor

Für die kinetische Energie des starren Körpers ergibt sich aus Gl. (3.59)

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'})^2 = T_{trans} + T_{rot} + T_{mix} \quad (3.61)$$

mit

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^2, \quad (3.62)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'})^2, \quad (3.63)$$

$$T_{mix} = \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}^{(i)'}). \quad (3.64)$$

Der Mischterm verschwindet wieder, wenn wir den Ursprung von K' in den Schwerpunkt legen ($\Rightarrow \sum m_i \vec{r}^{(i)'} = \vec{0}$) oder wenn keine Translation vorhanden ist ($\vec{v}_0 = \vec{0}$).

Mit $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ folgt für den Rotationsanteil

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{\omega}^2 \vec{r}^{(i)'^2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{(i)'})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{r}^{(i)'^2} \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha r_\alpha^{(i)'} \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta r_\beta^{(i)'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left[\sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i)'^2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)'} r_\beta^{(i)'} \right) \right] \omega_\alpha \omega_\beta \end{aligned} \quad (3.65)$$

und damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \quad (3.66)$$

mit

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i)'}{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)'} r_\beta^{(i)'} \right) \quad (3.67)$$

oder in Kontinuumsdarstellung

$$J_{\alpha\beta} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(\vec{r}'^2 \delta_{\alpha\beta} - r'_\alpha r'_\beta \right). \quad (3.68)$$

Die Matrix

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

nennt man den *Trägheitstensor* des starren Körpers.

Gl. (3.66) kann dann auch kompakt in der Form

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{J}} \vec{\omega} \quad (3.70)$$

geschrieben werden, wobei $\vec{\omega}^T$ der transponierte Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist, d.h. der Zeilenvektor $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Eigenschaften:

- Offensichtlich ist $\underline{\underline{J}}$ symmetrisch, d.h. $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}$.
 \Rightarrow Es gibt sechs unabhängige Komponenten.
- Für die Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_\alpha = \omega$ um eine festgehaltene Achse in α -Richtung (z.B. z -Achse: $\alpha = 3$) folgt

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha} \omega^2. \quad (3.71)$$

$\Rightarrow J_{\alpha\alpha}$ ist das entsprechende Trägheitsmoment.

- Für die Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ um eine beliebige Achse ergibt sich

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 J_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J_{\vec{n}} \omega^2 \quad (3.72)$$

mit dem Trägheitsmoment für die \vec{n} -Richtung

$$J_{\vec{n}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 J_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}. \quad (3.73)$$

Der Trägheitstensor enthält also in Form von nur sechs Zahlenwerten die Information über die Trägheitsmomente für beliebige und damit unendlich viele Richtungen.

- Der Trägheitstensor ist ein Tensor 2. Stufe.

Tensoren sind über ihr Verhalten unter Koordinatentransformationen (hier: Drehungen) definiert. Für die Komponenten des Ortsvektors gilt bei Drehung des Koordinatensystems

$$\vec{r}' = \underline{\underline{D}} \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad r'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} r_j \quad (3.74)$$

mit einer *orthogonalen* Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$:

$$\vec{r}'^2 \stackrel{!}{=} \vec{r}^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}^T = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^3 D_{ik} D_{jk} = \delta_{ij}. \quad (3.75)$$

Ein *Skalar* (= Tensor 0. Stufe) bleibt unter der Drehung invariant:

$$S' = S. \quad (3.76)$$

Ein *Vektor* (= Tensor 1. Stufe) ist eine dreikomponentige Größe \vec{V} , die sich genauso transformiert wie \vec{r} :

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} V_j \quad (3.77)$$

(mit derselben Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$).

Ein *Tensor 2. Stufe* ist eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit der Transformationseigenschaft

$$A'_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 D_{im} D_{jn} A_{mn}. \quad (3.78)$$

- Da $\underline{\underline{J}}$ ein Tensor 2. Stufe und $\vec{\omega}$ ein Vektor ist, folgt für die Rotationsenergie unter Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned}
T'_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 J'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{ij} D_{\alpha i} D_{\beta j} J_{ij} \sum_m D_{\alpha m} \omega_m \sum_n D_{\beta n} \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \left(\sum_\alpha D_{\alpha i} D_{\alpha m} \right) \left(\sum_\beta D_{\beta j} D_{\beta n} \right) J_{ij} \omega_m \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \delta_{im} \delta_{jn} J_{ij} \omega_m \omega_n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_i \omega_j = T_{rot}. \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Die Rotationsenergie ist also unter Drehungen des Koordinatensystems invariant, d.h. ein Skalar.

- Aus der Linearen Algebra weiß man, dass jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar ist. In unserem Fall bedeutet das, dass man das Koordinatensystem so drehen kann, dass der transformierte Trägheitstensor eine Diagonalmatrix ist:

$$\underline{\underline{J'}} = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Die Achsen dieses Koordinatensystems nennt man *Hauptträgheitsachsen* und bezeichnet die entsprechenden Richtungen mit ξ , η und ζ (mit den orthogonalen Einheitsvektoren \vec{n}_ξ , \vec{n}_η , \vec{n}_ζ). Die zugehörigen Trägheitsmomente J_ξ , J_η und J_ζ , d.h. die Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$ heißen *Hauptträgheitsmomente*. Der Trägheitstensor kann also durch sechs Zahlenangaben charakterisiert werden: die drei Hauptträgheitsmomente und drei Winkel, die die Richtungen der Hauptträgheitsachsen festlegen. Das steht im Einklang mit den sechs unabhängigen Komponenten von $\underline{\underline{J}}$.

Für die Rotationsenergie ergibt sich damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2), \quad (3.81)$$

wobei

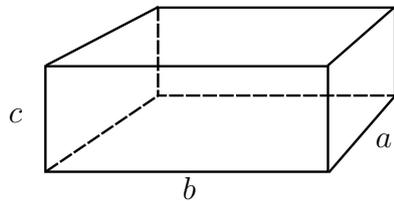
$$\omega_\xi = \vec{\omega} \cdot \vec{n}_\xi = \xi\text{-Komponente von } \vec{\omega} \quad (3.82)$$

und analog für η und ζ .

Man unterscheidet folgende Fälle:

- Kugelkreisel: $J_\xi = J_\eta = J_\zeta$
- symmetrischer Kreisel: $J_i = J_j \neq J_k, \quad \{i, j, k\} = \{\xi, \eta, \zeta\}$
- unsymmetrischer Kreisel: $J_\xi \neq J_\eta \neq J_\zeta \neq J_\xi$

Beispiel:



Quader mit Kantenlängen a, b, c
und homogener Massendichte ρ_0 .

$$\Rightarrow M = \rho_0 abc. \quad (3.83)$$

Wir legen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt und wählen die Achsen parallel zu den Kanten.

Dann gilt:

$$J_{\alpha\beta} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_{11} &= \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (y^2 + z^2) \\ &= \rho_0 a \left(c \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 + b \int_{-c/2}^{c/2} dz z^2 \right) \\ &= \frac{1}{12} \rho_0 abc (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2) \quad (3.85) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_{12} &= \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (-xy) \\ &= -\rho_0 c \int_{-a/2}^{a/2} dx x \int_{-b/2}^{b/2} dy y = 0 \quad (3.86) \end{aligned}$$

Durch Permutation von $(1, x, a)$, $(2, y, b)$ und $(3, z, c)$ bekommt man dann leicht die anderen Komponenten.

Wir erhalten also

$$\underline{\underline{J}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

d.h. $\underline{\underline{J}}$ ist diagonal mit den Hauptträgheitsachsen $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ und dem Hauptträgheitsmomenten $J_\xi = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$, $J_\eta = \frac{M}{12}(c^2 + a^2)$, $J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$.

Die Tatsache, dass $\underline{\underline{J}}$ diagonal ist, hängt mit unserer Wahl des Koordinatensystems zusammen, die an die Symmetrie des Quaders angepasst ist. Bei einer anderen Wahl der Achsenrichtungen ist der Trägheitstensor i.A. nicht diagonal. Dies ist auch der Fall, wenn wir den Koordinatenursprung nicht in den Schwerpunkt legen. Letzteres wollen wir im Folgenden allgemein untersuchen:

Wir betrachten ein körperfestes Koordinatensystem K' mit einem Ursprung, der nicht notwendiger Weise mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Ferner seien K^* ein körperfestes System mit dem Ursprung im Schwerpunkt und \vec{R} der Ortsvektor des Schwerpunkts in K' . Zwischen den Ortsvektoren $\vec{r}^{(i) \prime}$ in K' und $\vec{r}^{(i) *}$ in K^* besteht also der Zusammenhang

$$\vec{r}^{(i) \prime} = \vec{R} + \vec{r}^{(i) *}. \quad (3.88)$$

Aus der Definition des Trägheitstensors in K' , Gl. (3.67), folgt also

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \left[(\vec{R} + \vec{r}^{(i) *})^2 \delta_{\alpha\beta} - (R_\alpha + r_\alpha^{(i) *})(R_\beta + r_\beta^{(i) *}) \right] \\ &= \sum_i m_i \left(\vec{R}^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i) *2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i) *} r_\beta^{(i) *} \right) \\ &\quad + 2\vec{R} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}^{(i) *} \delta_{\alpha\beta}}_{=0} - R_\alpha \underbrace{\sum_i m_i r_\beta^{(i) *}}_{=0} - R_\beta \underbrace{\sum_i m_i r_\alpha^{(i) *}}_{=0} \\ &= M \left(\vec{R}^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right) + \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i) *2} \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i) *} r_\beta^{(i) *} \right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

d.h. es gilt der *Steiner'sche Satz*:

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^* + M \left(\vec{R}^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta \right), \quad (3.90)$$

wobei \underline{J}^* der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts ist.

3.5 Der Drehimpuls des starren Körpers

Wie wir in Abschnitt 3.3 diskutiert haben, sind die raum- und körperfesten Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Punkte des starren Körpers die folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}_0 + \vec{r}^{(i) \prime}, \quad (3.91)$$

$$\vec{v}^{(i)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i) \prime}. \quad (3.92)$$

Für den Drehimpuls ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}^{(i)} \times \vec{v}^{(i)} \\
&= \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}^{(i)'}) \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'}) \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \sum_i m_i \vec{r}^{(i)' } \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'}) \\
&\quad + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}^{(i)'}) + \sum_i m_i \vec{r}^{(i)' } \times \vec{v}_0. \tag{3.93}
\end{aligned}$$

Wenn wir den Ursprung von K' in den Schwerpunkt des Körpers legen, verschwindet $\sum m_i \vec{r}^{(i)'}$, und \vec{L} spaltet in Bahn- und inneren Drehimpuls auf (vgl. Abschnitt 1.4.2):

$$\vec{L} = \vec{L}_{Bahn} + \vec{L}_{in} \tag{3.94}$$

mit

$$\vec{L}_{Bahn} = M \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \quad (\equiv \vec{R} \times \vec{P} \quad \text{mit} \quad \vec{R} \equiv \vec{r}_0, \vec{P} \equiv M \vec{v}_0) \tag{3.95}$$

und

$$\vec{L}_{in} = \sum_i m_i \vec{r}^{(i)' } \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(i)'}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}^{(i)'}{}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}^{(i)' } \cdot \vec{\omega}) \vec{r}^{(i)' } \right). \tag{3.96}$$

Für die α -Komponente von \vec{L}_{in} gilt damit

$$\begin{aligned}
L_{in,\alpha} &= \sum_i m_i (\vec{r}^{(i)' }{}^2 \omega_\alpha - \sum_\beta r_\beta^{(i)' } \omega_\beta r_\alpha^{(i)' }) \\
&= \sum_\beta \sum_i m_i (\vec{r}^{(i)' }{}^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha^{(i)' } r_\beta^{(i)' }) \omega_\beta = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \omega_\beta, \tag{3.97}
\end{aligned}$$

d.h. wir finden in Matrix-Schreibweise

$$\vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \vec{\omega}. \tag{3.98}$$

Im Folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, dass \vec{L}_{Bahn} verschwindet, so dass wir den Index „in“ weglassen können,¹⁴

$$\vec{L} = \vec{L}_{in} = \underline{\underline{J}} \vec{\omega}. \tag{3.99}$$

¹⁴Wie man an dem allgemeinen Ausdruck für \vec{L} , Gl. (3.93), sieht, verschwinden sowohl \vec{L}_{Bahn} als auch die Mischterme, wenn die Ursprünge von K und K' übereinstimmen, d.h. $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 = \vec{0}$, selbst wenn sie nicht im Schwerpunkt des Körpers liegen.

Im Hauptachsensystem wird diese Gleichung besonders einfach:

$$\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\xi \omega_\xi \\ J_\eta \omega_\eta \\ J_\zeta \omega_\zeta \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Daraus folgt, dass \vec{L} zu $\vec{\omega}$ parallel ist, wenn die Drehachse mit einer der Hauptachsen übereinstimmt, z.B.

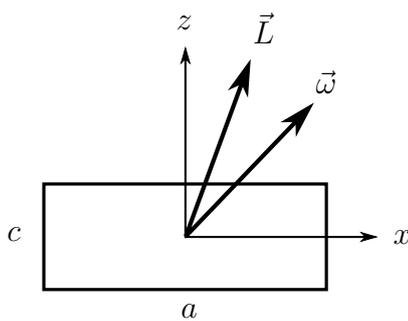
$$\vec{\omega} = \omega \vec{n}_\xi = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_\xi \omega \vec{n}_\xi. \quad (3.101)$$

Für einen Kugelkreisel, $J_\xi = J_\eta = J_\zeta =: J$, sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ immer parallel:

$$\underline{\underline{J}} = J \mathbb{1}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{n} \Rightarrow \vec{L} = J \omega \vec{n}. \quad (3.102)$$

Im Allgemeinen gilt dies jedoch, wie wir schon gesehen haben, nicht. Das hat wichtige Konsequenzen. Als Beispiel betrachten wir wieder den Quader aus Abschnitt 3.4. Der Quader rotiere zur Zeit $t = 0$ um eine Achse in der x - z -Ebene, wobei die Kanten zu diesem Zeitpunkt parallel zu den raumfesten Koordinatenachsen gerichtet seien: $\vec{n}_\xi(t = 0) = \vec{e}_x$, $\vec{n}_\eta(t = 0) = \vec{e}_y$, $\vec{n}_\zeta(t = 0) = \vec{e}_z$.

Anblick von der Seite:



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} J_\xi \omega_x \\ 0 \\ J_\zeta \omega_z \end{pmatrix}$$

$$J_\xi = \frac{M}{12}(c^2 + b^2)$$

$$J_\zeta = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

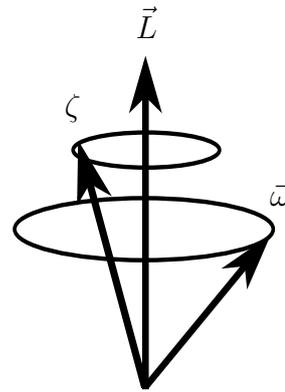
Durch die Rotation drehen sich in der Folgezeit die Hauptachsen ξ , η und ζ von den raumfesten x -, y - und z -Richtungen weg, d.h. $\underline{\underline{J}}$ ändert sich mit der Zeit. Für festgehaltenes $\vec{\omega}$ bedeutet das, dass sich \vec{L} ebenfalls ändert. Dafür muss aber ein äußeres Drehmoment und damit eine äußere Kraft aufgewendet werden (vgl. Abschnitt 3.2.1).

Ohne äußere Kräfte muss \vec{L} dagegen konstant bleiben. Da sich $\underline{\underline{J}}$ ändert, bedeutet das, dass sich $\vec{\omega}$ ebenfalls ändern muss:

$$\vec{L} = \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \underline{\underline{\dot{J}}}\vec{\omega} + \underline{\underline{J}}\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = -\underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{\dot{J}}}\vec{\omega} \quad (3.103)$$

Da $\underline{\underline{\dot{J}}}$ selbst von ω abhängt, führt dies i.A. zu einer komplizierten Bewegung, bei der die Drehachse ständig ihre Richtung ändert („Nutation“).

Etwas einfacher wird es im Fall eines symmetrischen Kreisels, also eines Körpers, bei dem zwei Hauptträgheitsmomente gleich lang sind, z.B. $J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta$. In diesem Fall kann man zeigen, dass \vec{L} , $\vec{\omega}$ und die ζ -Richtung („Figurenachse“) stets in einer gemeinsamen Ebene liegen, die periodisch rotiert. Dadurch überstreicht die Drehachse (und ebenso die Figurenachse) im Laufe der Zeit die Oberfläche eines Kegels („Nutationskegel“).



Kapitel 4

Lagrange-Mechanik

4.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Die Bewegung von N Punktmassen ist grundsätzlich durch die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

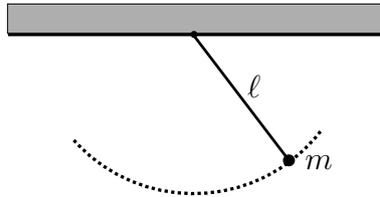
vollständig beschrieben. Dies ist ein System von $3N$ gekoppelten Differentialgleichungen, für dessen eindeutige Lösung grundsätzlich $6N$ Anfangsbedingungen benötigt werden. Oft ist die Zahl der tatsächlichen Freiheitsgrade jedoch viel kleiner, wie z.B. beim starren Körper 6 statt $\sim 10^{23}$. Die Ursache sind geometrische Einschränkungen, die verhindern, dass die N Teilchen beliebige Positionen $\vec{r}^{(i)}$ einnehmen können. Beim starren Körper ist das die Konstanz der Abstände, $r_{ij} = c_{ij} = \text{const}$. Eine zusätzliche Einschränkung ergibt sich, wenn der Körper um eine feste Achse rotiert, so dass der Rotationswinkel als einziger Freiheitsgrad übrig bleibt.

Mikroskopisch werden die geometrischen Einschränkungen durch innere und äußere Kräfte verursacht, z.B. elektrische Kräfte zwischen den Kristallgitterpunkten des Körpers oder Kräfte auf die Verankerung der Drehachse in der Wand. Meistens sind diese Kräfte aber nicht von vornherein bekannt, und häufig sind sie auch nicht von besonderem Interesse, wenn wir nur an der Beschreibung der verbliebenen Freiheitsgrade interessiert sind. Allgemein bezeichnet man geometrische Einschränkungen der freien Bewegung der Teilchen als *Zwangsbedingungen* und die Kräfte, die genau diese Einschränkungen bewirken, als *Zwangskräfte*.

Zwangsbedingungen und Zwangskräfte gibt es nicht nur für Vielteilchensysteme (wie den starren Körper), sondern auch für Punktmassen, wenn deren Bewegung eingeschränkt ist.

Beispiele:

1. mathematisches Pendel



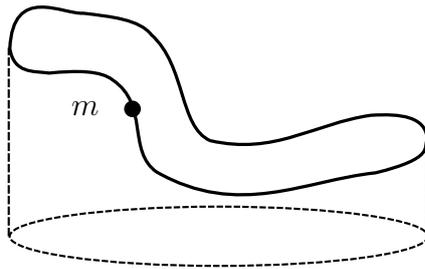
Wenn der Aufhängepunkt bei \vec{r}_0 liegt, gilt für die Punktmasse

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2. \quad (4.2)$$

⇒ Die Bewegung ist auf eine Kugeloberfläche eingeschränkt.

→ zwei Freiheitsgrade

2. Achterbahn



Teilchen auf einer vorgegebenen Bahnkurve $\vec{r}(s)$ im Raum

→ ein Freiheitsgrad

(z.B. zurückgelegte Wegstrecke s)

Die Zwangskäfte werden hier von den Schienen ausgeübt.

Klassifizierung von Zwangsbedingungen:

- Zwangsbedingungen, die die Koordinaten durch Gleichungen der Form

$$f_i(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, t) = 0 \quad (4.3)$$

miteinander in Beziehung setzen, nennt man *holonome Zwangsbedingungen*. Sind k holonome Zwangsbedingungen $f_i = 0$, $i = 1, \dots, k$ voneinander unabhängig, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf $s = 3N - k$.

Hängen die f_i nicht explizit von der Zeit ab, $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$, spricht man von *skleronomen Zwangsbedingungen*, ansonsten heißen sie *rheonome Zwangsbedingungen*.

Beispiele:

1. mathematisches Pendel

Wie oben besprochen, gilt $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \ell^2$. Das kann in der Form

$$f(\vec{r}) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \ell^2 = 0 \quad (4.4)$$

geschrieben werden. Wir haben also $k = 1$ holonome Zwangsbedingung für $N = 1$ Teilchen und demnach $s = 3 - 1 = 2$ Freiheitsgrade.

Da $f(\vec{r})$ nicht explizit von der Zeit abhängt, $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial t} = 0$, ist die Zwangsbedingung skleronom.

2. Pendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt

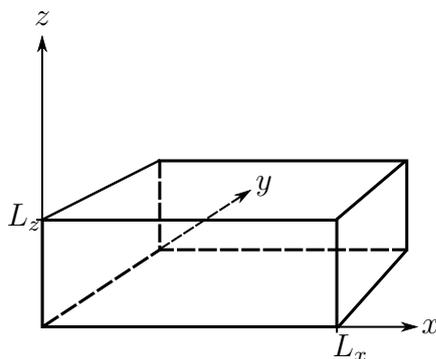
Wenn der Aufhängepunkt \vec{r}_0 des Pendels in fest vorgegebener Weise von der Zeit abhängt, z.B. $\vec{r}_0(t) = A \cos(\omega t) \vec{e}_z$, gilt analog

$$f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0(t))^2 - \ell^2 = 0. \quad (4.5)$$

Dies ist eine rheonome Zwangsbedingung, und es gilt wieder $s = 3 - 1 = 2$.

- Zwangsbedingungen, die sich nicht in der Form von Gl. (4.3) darstellen lassen, heißen *nicht-holonome Zwangsbedingungen*. Diese schränken zwar die Bewegung ein, reduzieren aber nicht die Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel: Teilchen in einem quaderförmigen Kasten



$$0 < x < L_x$$

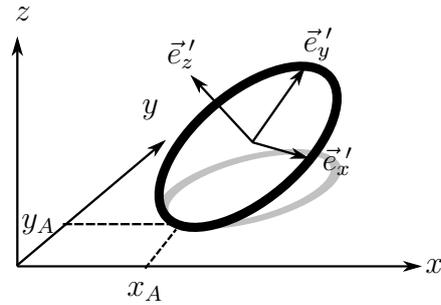
$$0 < y < L_y$$

$$0 < z < L_z$$

\Rightarrow Nicht alle (x, y, z) sind erlaubt, aber die Zahl der Freiheitsgrade pro Teilchen bleibt 3.

Ein komplizierteres Beispiel ist ein auf einer Ebene rollender Reifen. Als starrer Körper – wir sehen hier von Deformationen ab, der Reifen ist gut aufgepumpt – hat er zunächst sechs Freiheitsgrade.

Die Bedingung, dass der Reifen die Ebene berührt, ist eine holonome Zwangsbedingung, die die Zahl der Freiheitsgrade auf fünf reduziert, z.B. die Koordinaten (x_A, y_A) des Auflagepunkts in der Ebene und drei Winkel, die die Richtungen der körperfesten Achsen festlegen. (Der Reifen kann beliebig gegen die Ebene geneigt sein.)



Beim Abrollen des Reifens gibt es nun die zusätzliche Einschränkung, dass er sich zu jedem Zeitpunkt nur in der momentanen Reifenebene bewegen kann, die von \vec{e}'_x und \vec{e}'_y aufgespannt wird. Dadurch ist festgelegt, in welche Richtung sich der Auflagepunkt (x_A, y_A) beim Abrollen verschiebt, nämlich entlang der Schnittlinie der x - y -Ebene mit der x' - y' -Ebene. Die zeitliche Änderung des Auflagepunkts, (\dot{x}_A, \dot{y}_A) , hängt auf diese Weise von den Winkeln ab, die die Richtungen der körperfesten Achsen charakterisieren. Diese Bedingung lässt sich aber nur in differentieller Form angeben, nicht in Form von Gl. (4.3). Es handelt sich daher um eine nicht-holonome Zwangsbedingung. Insbesondere wird die Zahl der Freiheitsgrade nicht weiter reduziert: Alle fünf Kombinationen von (x_A, y_A) und der drei Winkel, die die körperfesten Achsen charakterisieren, können z.B. von einem Einradfahrer im Laufe der Zeit realisiert werden, wenn er durch entsprechende Gewichtsverlagerung und der damit verbundenen Änderung des Neigungswinkels einen geeigneten Weg wählt.¹⁵

4.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Die Bewegung eines Teilchens sei auf eine (i.A. gekrümmte und zeitabhängige) Fläche eingeschränkt, die durch die holonome Zwangsbedingung

$$f(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.6)$$

gegeben ist. Wirkt auf das Teilchen von außen eine Kraft \vec{F} , dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_Z, \quad (4.7)$$

¹⁵Eine ausführlichere Diskussion dazu findet man z.B. im „Goldstein“.

wobei \vec{F}_Z die Zwangskraft ist, die bewirkt, dass das Teilchen auf der vorgegebenen Fläche bleibt. \vec{F}_Z ist zunächst unbekannt. Da die Zwangskraft jedoch die Bewegung in der Fläche nicht beeinflusst, muss \vec{F}_Z senkrecht auf der Fläche stehen. Das bedeutet, dass \vec{F}_Z proportional zum Gradienten von f ist,

$$\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f \quad (4.8)$$

mit einem zunächst unbekanntem Parameter λ . Wir nutzen dabei aus, dass $\vec{\nabla} f$ ebenfalls senkrecht auf der Fläche $f(\vec{r}, t) = 0$ steht, wie folgendermaßen gezeigt werden kann:

Für die Änderung von f unter infinitesimalen Verschiebungen der Koordinaten gilt

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (4.9)$$

Wenn die Verschiebung innerhalb der Fläche erfolgt, bleibt f konstant (nämlich $f = 0$), d.h. $df = 0$. Zu einem festgehaltenen Zeitpunkt ($dt = 0$) gilt also für jede infinitesimale Verschiebung $d\vec{r}$ innerhalb der Fläche

$$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.10)$$

Folglich steht $\vec{\nabla} f$ senkrecht auf der Fläche.

Einsetzen von Gl. (4.8) in Gl. (4.7) liefert

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f. \quad (4.11)$$

Schreibt man das komponentenweise und nimmt die Zwangsbedingung Gl. (4.6) hinzu, sind das vier Gleichungen für vier unbekannte Größen: die drei Komponenten von \vec{r} und den Parameter λ .

Ist die Bewegung auf eine Kurve im Raum beschränkt (wie z.B. bei einer Achterbahn), haben wir zwei Zwangsbedingungen,

$$f_i(\vec{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Dies entspricht zwei Flächen, deren Schnittlinie die Kurve ergibt. Die Zwangskraft darf wieder die Bewegung entlang der Kurve nicht beeinflussen, muss also an jedem Punkt der Kurve in der Ebene senkrecht zur Kurve liegen. Diese wird von den Gradienten $\vec{\nabla} f_1$ und $\vec{\nabla} f_2$ aufgespannt. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2. \quad (4.13)$$

Zusammen mit den Zwangsbedingungen sind das fünf Gleichungen für fünf Unbekannte (\vec{r} , λ_1 , λ_2).

Für N Punktmassen m_i mit k Zwangsbedingungen

$$f_j(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4.14)$$

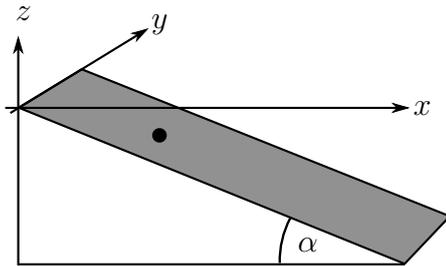
ergibt sich analog

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{\nabla}^{(i)} f_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Wie schon früher bezeichnen dabei $\vec{r}^{(i)}$ die Ortsvektoren des i -ten Punktes, und $\vec{\nabla}^{(i)}$ ist der entsprechende Gradient, s. Gl. (1.70).

Die obigen Bewegungsgleichungen nennt man *Lagrange-Gleichungen 1. Art*, die Parameter λ_j als *Lagrange-Parameter* oder *Lagrange-Multiplikatoren*.¹⁶

Beispiel:



Ein Teilchen mit Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z \quad (4.16)$$

auf einer schiefen Ebene.

Für die Punkte der Ebene gilt $z = -x \tan \alpha$, d.h. die Zwangsbedingung lautet

$$f(x, y, z) = z + x \tan \alpha = 0. \quad (4.17)$$

Daraus folgt für den Gradienten

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \tan \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

¹⁶Lagrange-Multiplikatoren treten meistens im Zusammenhang mit Extremwert-Problemen unter Nebenbedingungen auf. Das steckt auch hier dahinter, auch wenn das Extremwert-Problem bei unserer Herleitung nicht offensichtlich ist.

Die Bewegungsgleichungen $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla}f$ lauten daher komponentenweise

$$m\ddot{x} = \lambda \tan \alpha, \quad (4.19)$$

$$m\ddot{y} = 0, \quad (4.20)$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda. \quad (4.21)$$

Wenn wir nun Gl. (4.17) mit m multiplizieren und zweimal nach der Zeit ableiten,

$$m\ddot{z} + m\ddot{x} \tan \alpha = 0, \quad (4.22)$$

und dann die Gleichungen (4.19) und (4.21) einsetzen, erhalten wir

$$0 = -mg + \lambda + \lambda \tan^2 \alpha = -mg + \lambda (1 + \tan^2 \alpha) = -mg + \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha} \quad (4.23)$$

und damit

$$\lambda = mg \cos^2 \alpha. \quad (4.24)$$

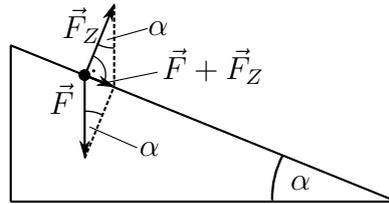
Für die Zwangskraft ergibt sich daraus

$$\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla}f = mg \cos \alpha \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

und für die resultierende Gesamtkraft

$$\vec{F}_Z + \vec{F} = mg \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 \\ \cos^2 \alpha - 1 \end{pmatrix} = mg \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Das hätte man auch geometrisch herleiten können, aber mit den Lagrange-Gleichungen geht es einfacher.



Einsetzen von Gl. (4.24) in Gl. (4.19) liefert für die x -Koordinate die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = mg \cos \alpha \sin \alpha \quad (4.27)$$

mit der Lösung

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} g \cos \alpha \sin \alpha t^2, \quad (4.28)$$

wobei x_0 und $v_{x,0}$ Integrationskonstanten sind. Die Bewegungsgleichung für die y -Koordinate ist schon in Gl. (4.20) gegeben und hat die Lösung

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} t \quad (4.29)$$

mit den Integrationskonstanten y_0 und $v_{y,0}$. Die z Koordinate ergibt sich direkt aus der Zwangsbedingung und der Lösung für x :

$$z(t) = -x(t) \tan \alpha = -x_0 \tan \alpha - v_{x,0} \tan \alpha t - \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha t^2. \quad (4.30)$$

Nach diesem Beispiel sehen wir uns nun einen etwas allgemeineren Fall an, nämlich die Bewegung eines Teilchens auf einer ruhenden Fläche, die durch eine skleronome Zwangsbedingung

$$f(\vec{r}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (4.31)$$

beschrieben werde. Die totale Ableitung der Zwangsbedingung nach der Zeit ist dann

$$0 = \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{r}_i = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f \quad (4.32)$$

und damit die zweite Ableitung¹⁷

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} f(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f) = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f). \quad (4.33)$$

¹⁷Am sichersten rechnet man auch hier wieder komponentenweise:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\vec{r}(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{r}_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{r}_i \right) + \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial r_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \dot{r}_i \right) \right] \dot{r}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \ddot{r}_i + \sum_{i,j=1}^3 \dot{r}_j \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_i} f \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder verwendet, dass f nur vom Ort, aber nicht explizit von der Zeit abhängt, während umgekehrt die Komponenten der Geschwindigkeit nur von der Zeit, aber nicht vom Ort abhängen. Aus diesem Grund können wir r_i und $\frac{\partial}{\partial r_j}$ auch wieder vertauschen und erhalten

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\vec{r}(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial r_i} \ddot{r}_i + \sum_{j=1}^3 \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial r_i} f = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f).$$

Dabei sind die Indizes genau zu beachten: Obwohl $\dot{\vec{r}}$ nicht von \vec{r} abhängt, der Gradient also nur auf f wirkt, kann der letzte Term nicht als $\dot{\vec{r}}^2 \Delta f = \sum_{i,j} \dot{r}_i \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} f$ geschrieben werden.

Betrachten wir nun die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f \quad (4.34)$$

und multiplizieren sie skalar mit $\vec{\nabla} f$, dann ergibt sich

$$\left(\vec{F} + \lambda \vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{\nabla} f = m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f \stackrel{(4.33)}{=} -m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f\right) \quad (4.35)$$

und daraus

$$\lambda = -\frac{m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f\right) + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f}{\left(\vec{\nabla} f\right)^2} \equiv \lambda(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (4.36)$$

Damit ist die Zwangskraft $\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f$ bekannt und folglich die ganze rechte Seite von Gl. (4.34).

Die Rechnung zeigt, dass – anders als im Fall der schiefen Ebene – die Zwangskraft i.A. auch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen kann und damit nicht mehr rein geometrisch bestimmt werden kann. Anschaulich ist das plausibel für Kurven in einer Achterbahn und gilt ähnlich auch für gekrümmte Flächen, z.B. für die Fadenspannung beim Pendel.

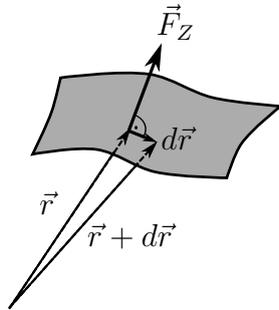
4.3 Virtuelle Verrückungen und das D'Alembert'sche Prinzip

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art erlauben es uns, die Bewegungsgleichungen eines Systems von Teilchen unter Zwangsbedingungen und die zugehörigen Zwangskräfte zu berechnen. In vielen Fällen sind wir aber nur an den Bewegungsgleichungen interessiert und weniger an den Zwangskräften. Für diese Fälle wollen wir im Folgenden ein effektiveres Verfahren entwickeln, bei dem die Zwangskräfte nicht mehr explizit in Erscheinung treten.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass für skleronome Zwangsbedingungen die von den Zwangskräften geleistete Arbeit

$$dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r} \quad (4.37)$$

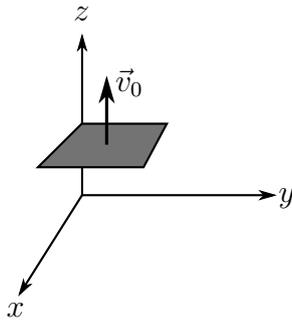
verschwindet, sofern sich das Teilchen im Einklang mit den Zwangsbedingungen bewegt. Der Grund dafür ist, dass die Bewegung nur innerhalb der durch die Zwangsbedingung vorgegebenen Kurve oder Fläche stattfinden kann, während \vec{F}_Z senkrecht darauf steht:



$$d\vec{r} \perp \vec{F}_Z \Rightarrow dW_Z = 0 \quad (4.38)$$

Das stimmt jedoch nicht mehr, wenn wir es mit rheonomen, also zeitabhängigen Zwangsbedingungen zu tun haben.

Beispiel: Teilchen im Aufzug



Die Bewegung sei auf den Boden des Aufzugs beschränkt, der mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ nach oben fährt.

Die Zwangsbedingung lautet also

$$f(z) = z - v_0 t = 0, \quad (4.39)$$

so dass die Zwangskraft die Form

$$\vec{F}_Z = \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

annimmt. Wenn sich das Teilchen nun mit der Geschwindigkeit v_x in x -Richtung bewegt, benötigt es die Zeit $dt = \frac{dx}{v_x}$, um seine x -Koordinate um dx zu ändern. In dieser Zeit ändert sich aber auch die z -Koordinate: $dz = v_0 dt$. Nehmen wir auch die y -Bewegung mit, finden wir

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_0 \end{pmatrix} dt, \quad (4.41)$$

wobei v_x und v_y beliebig sind, v_0 aber durch die Zwangsbedingung vorgegeben und damit unvermeidlich ist.

Daraus folgt

$$dW_Z = \vec{F}_Z \cdot d\vec{r} = \lambda v_0 dt \neq 0, \quad (4.42)$$

d.h. die Zwangskraft leistet i.A. Arbeit. Das ist auch sofort einsichtig, denn der Aufzug leistet offensichtlich Arbeit gegen die Schwerkraft.¹⁸

Um das Ergebnis, dass Zwangskräfte keine Arbeit leisten, dennoch auf den Fall zeitabhängiger Zwangsbedingungen zu verallgemeinern (aus Gründen, die später klar werden), führen wir den Begriff der *virtuellen Verrückung* ein:

Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$ ist eine infinitesimale Ortsänderung im Einklang mit den Zwangsbedingungen, die jedoch im Gegensatz zu den vorher diskutierten realen Verrückungen $d\vec{r}$ instantan erfolgt, d.h. keine Zeit in Anspruch nimmt.

Für unser Beispiel mit dem Aufzug ergibt sich

$$\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

mit beliebigen infinitesimalen δx und δy , jedoch $\delta z = 0$, da sich zu einer festgehaltenen Zeit die z -Komponente nicht ändern darf. Es folgt

$$\delta W_Z = \vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r} = 0, \quad (4.44)$$

d.h. bei einer virtuellen Verrückung leisten die Zwangskräfte keine Arbeit. Das gilt ganz allgemein, weil zu einer festgehaltenen Zeit die Zwangskräfte immer senkrecht auf den erlaubten Bewegungen stehen.

Für Mehrteilchensysteme gilt analog

$$\sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta\vec{r}^{(i)} = 0. \quad (4.45)$$

Anders als bei einem einzelnen Teilchen auf einer Kurve oder Fläche ist hier allerdings vielleicht nicht unmittelbar einsichtig, inwiefern die Zwangskräfte, die die Koordinaten verschiedener Teilchen in Beziehung setzen (z.B. die Zwangskräfte, die beim starren Körper die Abstände der Teilchen konstant halten) senkrecht auf den virtuellen Verrückungen stehen. Dazu fasst man

¹⁸ Dies kann man leicht überprüfen, indem man λ aus den Lagrange-Gleichungen berechnet.

die Ortsvektoren der verschiedenen Teilchen am besten zu einem einzigen $3N$ -dimensionalen Vektor

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}^{(1)} \\ \vec{r}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{(N)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(N)} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

zusammen. Die Zwangsbedingungen setzen dann wieder die Komponenten dieses Vektors miteinander in Beziehung, d.h. bei k unabhängigen Zwangsbedingungen sind die erlaubten Bewegungen auf eine $(3N - k)$ -dimensionale Hyperfläche innerhalb des $3N$ -dimensionalen Raums eingeschränkt. Fasst man nun die Zwangskräfte, die auf die einzelnen Teilchen wirken, ebenfalls zu einem $3N$ -dimensionalen Vektor zusammen,

$$\tilde{F}_Z = \begin{pmatrix} \vec{F}_Z^{(1)} \\ \vec{F}_Z^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{F}_Z^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

dann muss dieser wieder senkrecht auf der erlaubten Bewegung stehen, um diese nicht zu beeinflussen. Es gilt also

$$\tilde{F}_Z \cdot \delta \tilde{r} = 0, \quad (4.48)$$

was ausgedrückt durch die ursprünglichen dreidimensionalen Vektoren genau Gl. (4.45) ergibt.

Betrachten wir nun ein Teilchen mit der Masse m_i , auf das die Kraft $\vec{F}^{(i)}$ und zusätzlich die Zwangskraft $\vec{F}_Z^{(i)}$ wirkt. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten dann also

$$m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} = \vec{F}^{(i)} + \vec{F}_Z^{(i)}. \quad (4.49)$$

Bringen wir $\vec{F}^{(i)}$ auf die andere Seite, multiplizieren mit $\delta \vec{r}^{(i)}$ und summieren über alle Teilchen, ergibt sich

$$\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} - \vec{F}^{(i)}) \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = \sum_i \vec{F}_Z^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)}. \quad (4.50)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber gemäß Gl. (4.45). Damit gilt das *D'Alembert'sches Prinzip*

$$\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} - \vec{F}^{(i)}) \cdot \delta \vec{r}^{(i)} = 0. \quad (4.51)$$

Damit sind wir unserem Ziel einen Schritt näher gekommen. Wir haben eine Gleichung gefunden, die die Bewegung der Teilchen beschreibt und die Zwangskräfte nicht mehr enthält. Allerdings sind die Zwangsbedingungen noch implizit in den erlaubten virtuellen Verrückungen enthalten. Das macht das D'Alembert'sche Prinzip für konkrete Rechnungen unpraktikabel, und wir müssen noch einen Schritt weiter gehen.

4.4 Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen 2. Art

Das D'Alembert'sche Prinzip muss für *alle* erlaubten virtuellen Verrückungen erfüllt sein. Könnte man alle $3N$ Komponenten $\delta r_j^{(i)}$ unabhängig von einander beliebig wählen, wäre dies nur möglich, wenn $(m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} - \vec{F}^{(i)})$ für alle i verschwände. Die $\delta r_j^{(i)}$ sind jedoch nur dann unabhängig, wenn es keine Zwangsbedingungen gibt, und dann hätten wir $m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} - \vec{F}^{(i)} = 0$ auch schon vorher gewusst ... Im Allgemeinen sind die $\delta r_j^{(i)}$ von einander abhängig, da die Zwangsbedingungen $f_j(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, t) = 0$ die Bewegung einschränken.¹⁹ Das Problem besteht also darin, dass wir „zu viele“ Koordinaten haben – mehr als das System Freiheitsgrade besitzt. Es ist daher zweckmäßig, *generalisierte Koordinaten* einzuführen, die an die jeweiligen Zwangsbedingungen angepasst und vollkommen unabhängig von einander sind. Die generalisierten Koordinaten können dann frei variiert werden.

In einem System mit N Punktmassen und k holonomen Zwangsbedingungen gibt es, wie wir gesehen haben, $s = 3N - k$ Freiheitsgrade. Wir können das System also durch s generalisierte Koordinaten beschreiben, die wir im Folgenden mit q_1, \dots, q_s bezeichnen. Die Wahl dieser Koordinaten ist nicht eindeutig. Ausgehend von den ursprünglichen $r_j^{(i)}$ kann man mit Hilfe der Zwangsbedingungen k Koordinaten eliminieren und die restlichen s Koordinaten beibehalten. Oft ist aber eine andere Wahl für das jeweilige Problem geschickter, z.B. Drehwinkel oder die auf einer vorgegebenen Kurve zurückgelegte Strecke. Häufig können die generalisierten Koordinaten auch nicht mehr einem einzelnen Teilchen zugeordnet werden, sondern betreffen mehrere Teilchen oder sogar das System als Ganzes. Beispiele, die wir bereits kennen gelernt haben, sind die Komponenten des Schwerpunkts- oder des Relativvektors zweier Teilchen.

Die Ableitungen \dot{q}_j der generalisierten Koordinaten q_j nach der Zeit nennt man *generalisierte Geschwindigkeiten*. Da die q_j nicht notwendiger Weise die

¹⁹Z.B. gilt für die schiefe Ebene aus Abschnitt 4.2 $\delta z = -\tan \alpha \delta x$.

Dimension einer Länge haben, haben die generalisierten Geschwindigkeiten auch nicht immer die Dimension einer Geschwindigkeit.

Beispiel: $q_j = \varphi$ (Winkel) $\Rightarrow \dot{q}_j = \dot{\varphi} = \omega$ (Winkelgeschwindigkeit)

Wir wollen nun das D'Alembert'sche Prinzip auf die generalisierten Koordinaten übertragen. Die ursprünglichen Koordinaten $r_j^{(i)}$ lassen sich eindeutig als Funktionen der generalisierten Koordinaten und der Zeit berechnen:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s, t). \quad (4.52)$$

Dabei ist zu beachten, dass die q_j von der Zeit abhängen, so dass $\vec{r}^{(i)}$ implizit über $q_j(t)$ von der Zeit abhängt. Daneben kann $\vec{r}^{(i)}$ aber i.A. auch explizit von der Zeit abhängen. Für die ursprünglichen Geschwindigkeiten folgt dann unter Benutzung der Kettenregel

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} = \dot{\vec{r}}^{(i)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (4.53)$$

Da die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten vollkommen unabhängig von einander sind (d.h. alle q_j und \dot{q}_j können beliebig vorgegeben werden), folgt daraus

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}. \quad (4.54)$$

Für die virtuellen Verrückungen ergibt sich aus der Kettenregel

$$\delta \vec{r}^{(i)} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (4.55)$$

Hier tritt keine Zeitableitung auf, da die virtuelle Verrückung instantan erfolgt.

Die von den Kräften $\vec{F}^{(i)}$ geleistete virtuelle Arbeit ist also

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \sum_{i=1}^N \vec{F}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right) \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \end{aligned} \quad (4.56)$$

mit den *generalisierten Kräften*

$$Q_j := \sum_{i=1}^N \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j}. \quad (4.57)$$

Da $q_j \delta q_j$ die Dimension einer Energie hat, hat q_j nur dann die Dimension einer Kraft, wenn q_j die Dimension einer Länge hat. Wie wir schon gesagt haben, ist dies nicht notwendiger Weise der Fall.

Für das D'Alembert'sche Prinzip müssen wir noch die Summe $\sum m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)}$ auswerten. Dazu machen wir zunächst eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} &= \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} \right)}_{=\dot{\vec{r}}^{(i)}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass man die Reihenfolge der partiellen Ableitung vertauschen kann.

Wir finden dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \delta \vec{r}^{(i)} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \ddot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &\stackrel{(4.54),(4.58)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \frac{m_i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}^{(i)2}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \end{aligned} \quad (4.59)$$

mit der kinetischen Gesamtenergie des Systems

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}^{(i)2}. \quad (4.60)$$

Zusammen mit Gl. (4.56) ergibt sich damit aus dem D'Alembert'schen Prinzip

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (4.61)$$

Das muss für alle virtuellen Verrückungen δq_j gelten. Da diese aber – anders als die $\delta \vec{r}^{(i)}$ – von einander unabhängig sind, kann das nur erfüllt sein, wenn der Ausdruck in den geschweiften Klammern für jedes k verschwindet. Es muss also gelten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s \quad (4.62)$$

Wenn das Kraftfeld konservativ ist, existiert ein Potenzial V mit

$$\vec{F}^{(i)} = -\vec{\nabla}^{(i)} V. \quad (4.63)$$

Wie bislang immer bei konservativen Kraftfeldern nehmen wir an, dass V nur von den Koordinaten $\vec{r}^{(i)}$ und nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}^{(i)}$ abhängt $V = V(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)})$. Für die generalisierten Kräfte gilt dann

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}^{(i)} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (4.64)$$

wobei wir wieder die Kettenregel verwendet haben.

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (4.65)$$

Da V nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}^{(i)}$ abhängt, folgt außerdem

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}^{(i)} V \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (4.66)$$

da die $\vec{r}^{(i)}$ nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängen, s. Gl. (4.52). Es gilt also $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}$, und wir erhalten die

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (4.67)$$

mit der *Lagrange-Funktion*²⁰

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) := T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) - V(q_1, \dots, q_s, t). \quad (4.68)$$

Die Lagrange-Gleichungen sind s Differenzialgleichungen 2. Ordnung, so dass $2s$ Anfangsbedingungen zur eindeutigen Bestimmung der Lösungen benötigt werden. Die Zwangsbedingungen tauchen in den Gleichungen nicht mehr auf: Sie wurden bereits im Vorfeld bei der Wahl der generalisierten Koordinaten verarbeitet.

Zur Lösung von Problemen mit konservativen Kraftfeldern und holonomen Zwangsbedingungen geht man also folgendermaßen vor:

1. Bestimme die Zahl der Freiheitsgrade s und wähle geeignete generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_s .
2. Bestimme T, V und damit die Lagrange-Funktion $L = T - V$ als Funktion der q_j, \dot{q}_j und ggf. t .
3. Berechne daraus die Lagrange-Gleichungen

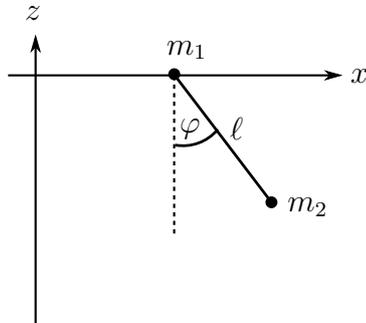
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$$

(4. Löse die Gleichungen.)

Punkt 3 dieser Liste – die Herleitung der Bewegungsgleichung eines i.A. komplexen Mehrteilchensystems mit Zwangsbedingungen – ist die eigentliche Leistung des Lagrange-Formalismus'. Dass man diese Gleichungen (i.A. mehrere gekoppelte Differenzialgleichungen) auch analytisch lösen kann, ist leider nicht garantiert. Oft lassen sie sich aber zumindest numerisch lösen, so dass mit dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen schon viel gewonnen ist.

²⁰Selbst wenn T und V als Funktionen von $\vec{r}^{(i)}$ und $\dot{\vec{r}}^{(i)}$ nicht explizit von der Zeit abhängen, können sie (und damit auch L) als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten eine explizite Zeitabhängigkeit bekommen, wenn der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den generalisierten Koordinaten wie in Gl. (4.52) eine solche explizite Zeitabhängigkeit besitzt.

Beispiel: ebenes Rollpendel



Eine Punktmasse m_1 kann sich entlang der x -Achse reibungsfrei bewegen. Eine zweite Masse m_2 ist durch eine masselose Stange der Länge ℓ an m_1 befestigt und kann frei in der x - z -Ebene schwingen. Auf beide Massen wirke die Schwerkraft in negative z -Richtung.

Ausgehend von den dreidimensionalen kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

haben wir also vier Zwangsbedingungen:

$$1.) \quad y^{(1)} = 0 \quad (4.70)$$

$$2.) \quad z^{(1)} = 0 \quad (4.71)$$

$$3.) \quad y^{(2)} = 0 \quad (4.72)$$

$$4.) \quad (\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)})^2 = \ell^2 \quad \Rightarrow \quad (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + z^{(2)2} = \ell^2 \quad (4.73)$$

Es gibt daher $6 - 4 = 2$ Freiheitsgrade.

Die Geometrie des Problems legt nahe, $x^{(1)}$ und den Winkel φ als generalisierte Koordinaten zu wählen:

$$q_1 = x^{(1)}, \quad q_2 = \varphi. \quad (4.74)$$

Es gilt dann

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \ell \sin \varphi \quad (4.75)$$

$$z^{(2)} = -\ell \cos \varphi \quad (4.76)$$

und damit

$$\dot{x}^{(2)} = \dot{x}^{(1)} + \ell \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (4.77)$$

$$\dot{z}^{(2)} = \ell \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4.78)$$

Wir erhalten also für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{r}^{(1)2} + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^{(2)2} \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)2} + \frac{1}{2}m_2[(\dot{x}^{(1)} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\ell\dot{\varphi}\sin\varphi)^2] \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^{(1)2} + \frac{1}{2}m_2[\dot{x}^{(1)2} + \ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\ell\dot{x}^{(1)}\dot{\varphi}\cos\varphi] \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^{(1)2} + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell\dot{x}^{(1)}\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (4.79)
\end{aligned}$$

sowie für die potenzielle Energie

$$V = m_2gz^{(2)} = -m_2g\ell\cos\varphi \quad (4.80)$$

und damit für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^{(1)2} + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell\dot{x}^{(1)}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2g\ell\cos\varphi. \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\dot{x}^{(1)} + m_2\ell\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (4.82)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2)\ddot{x}^{(1)} + m_2\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\ell^2\dot{\varphi} + m_2\ell\dot{x}^{(1)}\cos\varphi \quad (4.85)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\ell(\ell\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\cos\varphi - \dot{x}^{(1)}\dot{\varphi}\sin\varphi) \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2\ell(\dot{x}^{(1)}\dot{\varphi} + g)\sin\varphi. \quad (4.87)$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} - \frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = (m_1 + m_2)\ddot{x}^{(1)} + m_2\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0 \quad (4.88)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2\ell(\ell\ddot{\varphi} + \ddot{x}^{(1)}\cos\varphi + g\sin\varphi) = 0. \quad (4.89)$$

Diese Gleichungen müssten nun simultan gelöst werden, was schwierig, aber numerisch grundsätzlich möglich ist.²¹

4.5 Erhaltungssätze

Wie wir in Gl. (4.88) sehen, gilt in dem obigen Beispiel $\frac{\partial L}{\partial x^{(1)}} = 0$. Damit folgt sofort aus den Lagrange-Gleichungen, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = 0, \quad (4.90)$$

d.h. die Größe

$$p_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(1)}} = (m_1 + m_2) \dot{x}^{(1)} + m_2 \ell \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (4.91)$$

ist zeitlich konstant! Tatsächlich handelt es sich bei p_1 um die x -Komponente des Gesamtimpulses,

$$p_1 = m_1 \dot{x}^{(1)} + m_2 \dot{x}^{(2)} \quad (4.92)$$

(vgl. Gl. (4.77)), der natürlich eine Erhaltungsgröße ist, da keine Kraft in x -Richtung wirkt.

Allgemein bezeichnet man

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.93)$$

als den zu q_j *kanonisch konjugierten Impuls*. Offensichtlich gilt dann:

Ist L nicht explizit von q_j abhängig, dann ist der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls konstant:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.} \quad (4.94)$$

q_j wird dann als *zyklische Koordinate* bezeichnet.

Die Erhaltung des zu einer zyklischen Variablen gehörenden kanonisch konjugierten Impulses ist ein Spezialfall des *Noether-Theorems* (Emmy Noether, 1918), wonach für jede kontinuierliche Symmetrietransformation, die die Lagrange-Funktion invariant lässt, eine Erhaltungsgröße vorliegt. Dieses Theorem spielt in der Physik eine große Rolle.

²¹Im vorliegenden Fall könnte man zunächst noch Gl. (4.88) nach $\ddot{x}^{(1)}$ auflösen und in Gl. (4.89) einsetzen. Man erhält so eine Differenzialgleichung, die nur noch von φ und ihren ersten und zweiten Ableitungen abhängt.

Als eines der wichtigsten Beispiele betrachten wir die *Homogenität der Zeit*. Darunter versteht man, dass der Ablauf eines Experiments nicht vom konkreten Anfangszeitpunkt abhängt: Werden zwei Experimente A und B mit den gleichen Anfangsbedingungen zu den Zeiten t_A bzw. $t_B = t_A + \Delta t$ gestartet, dann sind die jeweiligen Bewegungsabläufe auch entsprechend zeitverschoben, aber ansonsten identisch:

$$\vec{r}_A^{(i)}(t) = \vec{r}_B^{(i)}(t + \Delta t). \quad (4.95)$$

Im Rahmen des Lagrange-Formalismus' bedeutet das, dass skleronome Zwangsbedingungen vorliegen und dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (4.96)$$

d.h. $L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$. Für die totale Zeitableitung gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j, \end{aligned} \quad (4.97)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Lagrange-Gleichungen verwendet haben.

Wir finden also

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L \right) = 0, \quad (4.98)$$

d.h.

$$H := \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L = \text{const.} \quad (4.99)$$

Dabei ist H die so genannte *Hamilton-Funktion* des Systems.

Zur Interpretation dieses Ergebnisses nutzen wir aus, dass wir skleronome Zwangsbedingungen vorausgesetzt hatten, so dass wir die generalisierten Koordinaten so wählen können, dass der Zusammenhang mit den ursprünglichen Koordinaten nicht explizit von der Zeit abhängt:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s), \quad \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial t} = 0 \quad (4.100)$$

Es gilt also

$$\dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (4.101)$$

und damit für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad (4.102)$$

mit

$$m_{k\ell} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}. \quad (4.103)$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j,k,\ell=1}^s m_{k\ell} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)}_{\delta_{jk} \dot{q}_\ell + \dot{q}_k \delta_{j\ell}} \dot{q}_j = \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell = 2T. \quad (4.104)$$

Außerdem gilt für konservative Kräfte $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ und daher

$$\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (4.105)$$

Für die Hamilton-Funktion ergibt sich damit

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E, \quad (4.106)$$

d.h. die mit der Homogenität der Zeit verbundene Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie!

Auf ähnliche Weise kann man zeigen dass die *Homogenität des Raumes*, d.h. die Invarianz der physikalischen Abläufe gegenüber einer räumlichen Verschiebung des Gesamtsystems,

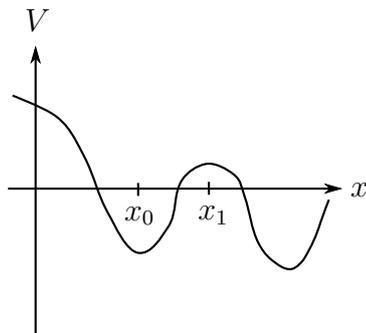
$$\vec{r}^{(i)} \rightarrow \vec{r}^{(i)} + \Delta \vec{r}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.107)$$

auf die Erhaltung des Gesamtimpulses führt. Ebenso ist die Invarianz unter Drehungen des Gesamtsystems (*Isotropie des Raumes*) mit der Drehimpulserhaltung verbunden.

Kapitel 5

Schwingungen

Schwingungen spielen in allen Bereichen der Physik eine große Rolle. Sie treten in der Regel dann auf, wenn ein physikalisches System geringfügig aus einer stabilen Gleichgewichtslage entfernt wird. Betrachten wir als Beispiel ein eindimensionales System mit einem beliebigen Potenzial, das an der Stelle $x = x_0$ ein lokales Minimum besitzt:



$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} =: k > 0 \quad (5.2)$$

Für die Kraft gilt $F(x) = -\frac{dV}{dx}$, d.h. die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}. \quad (5.3)$$

Am Ort $x = x_0$ haben wir also $F = 0$, d.h. das System befindet sich im *Gleichgewicht*. Es gilt dann $\ddot{x} = 0$ und, wenn als Anfangsbedingung auch $\dot{x} = 0$ gewählt wird, bleibt das Teilchen bei $x = x_0$.

In geringer Entfernung vom Gleichgewichtspunkt können wir das Potenzial

Taylor-entwickeln:

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{V''(x_0)}_{=k} (x - x_0)^2 + \dots \\ &= V(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Wenn x nahe genug bei x_0 liegt, können wir die höheren Ordnungen vernachlässigen. Für die Kraft gilt dann

$$F(x) \approx -k(x - x_0), \quad (5.5)$$

d.h. F ist proportional zur Auslenkung (*Hooke'sches Gesetz*) und zieht das Teilchen zurück in die Gleichgewichtslage (*stabiles Gleichgewicht*). Insbesondere verhält sich das System – solange die Auslenkung klein genug ist – wie ein harmonischer Oszillator, d.h. es vollführt Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage.

In der Nähe eines Potenzialmaximums x_1 gilt dagegen $V'(x_1) = 0$ und $V''(x_1) =: -\kappa < 0$. Daraus folgt $F(x) \approx +\kappa(x - x_1)$, d.h. die Kraft drückt das Teilchen weiter vom Gleichgewichtspunkt weg (*labiles Gleichgewicht*).

Die hier angestellten Überlegungen gelten in ähnlicher Weise auch für andere generalisierte Koordinaten in der Nähe von stabilen Gleichgewichtspunkten $q = q_0$ (s. Abschnitt 5.2).

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

5.1.1 Ungedämpfte freie Schwingung

Wir können das Koordinatensystem so wählen, dass der Gleichgewichtspunkt bei $x_0 = 0$ liegt. Außerdem wählen wir $V(0) = 0$, d.h.

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2. \quad (5.6)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad (5.7)$$

und somit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.8)$$

Diese Differenzialgleichung 2. Ordnung hat zwei unabhängige Lösungen, z.B. $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$, so dass die allgemeine Lösung als

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (5.9)$$

oder alternativ in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.10)$$

geschrieben werden kann.²² Für die Gesamtenergie des Oszillators ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_0^2}_{=k} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (5.11)$$

d.h.

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{const.} \quad (5.12)$$

5.1.2 Gedämpfte Schwingung

Wir führen nun zusätzlich eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft ein, deren Stärke proportional zur Geschwindigkeit ist und dieser entgegen wirkt (*Stokes'sche Reibung*):

$$F_R(\dot{x}) = -\beta \dot{x}. \quad (5.13)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann also

$$m \ddot{x} = F(x) = -kx - \beta \dot{x}, \quad (5.14)$$

d.h.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.15)$$

Zur Lösung einer solchen Differenzialgleichung empfiehlt sich ein Exponentialansatz

$$x(t) = c e^{\lambda t} \quad (5.16)$$

²² Aus dem Additionstheorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ folgt

$$a = A \cos \varphi, \quad b = -A \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = -\arctan \frac{b}{a}.$$

mit komplexen Konstanten c und λ . Ein solcher Ansatz hat den Vorteil, dass alle Zeitableitungen von x automatisch proportional zu x sind,

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \ddot{x} = \lambda^2 x \quad (5.17)$$

so dass die Differenzialgleichung in eine algebraische Gleichung übergeht (s.u.).

Die physikalischen Lösungen $x(t)$ müssen natürlich reell sein. Die Erweiterung ins Komplexe ist aber kein Problem: Sei $x(t) = u(t) + iv(t)$ mit reellen Funktionen u und v eine Lösung von Gl. (5.15). Dann gilt

$$0 = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + \omega_0^2 u) + i(\ddot{v} + 2\gamma\dot{v} + \omega_0^2 v), \quad (5.18)$$

d.h. $u = \operatorname{Re} x$ und $v = \operatorname{Im} x$ erfüllen ebenfalls die Differenzialgleichung. Wir können also aus einer komplexen Lösung leicht eine reelle Lösung gewinnen, indem wir einfach den Real- oder Imaginärteil bilden. Darüber hinaus bleibt die Lösung automatisch reell, wenn wir konkrete reelle Anfangsbedingungen vorgeben.

Einsetzen von Gl. (5.17) in Gl. (5.15) liefert

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) x = 0 \quad (5.19)$$

mit den Lösungen

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (5.20)$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x(t) = \left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) e^{-\gamma t}, \quad (5.21)$$

bei der wir drei Fälle unterscheiden können:

i) schwache Dämpfung („Schwingfall“): $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$\Rightarrow x(t) = \left(c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) e^{-\gamma t}, \quad (5.22)$$

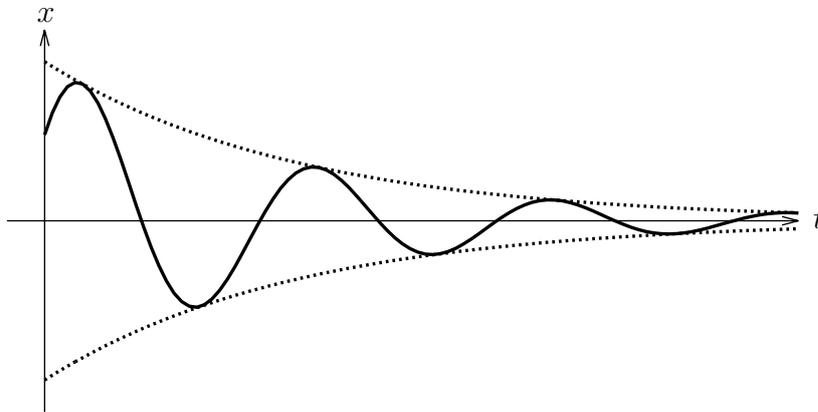
\uparrow Schwingung \uparrow \uparrow Dämpfung

d.h. es liegt eine gedämpfte Schwingung vor.

Durch Bildung des Realteils ergibt sich daraus, dass die allgemeine physikalische Lösung die Form

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) e^{-\gamma t}, \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (5.23)$$

besitzt.



ii) starke Dämpfung („Kriechfall“): $\gamma^2 > \omega_0^2$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \quad (5.24)$$

\uparrow langsamer \uparrow schneller abfallend

d.h. die Masse nähert sich der Ruhelage $x = 0$ an, ohne zu oszillieren.

iii) „aperiodischer Grenzfall“: $\gamma^2 = \omega_0^2$

Im Grenzfall $\gamma^2 \rightarrow \omega_0^2$ ergibt sich aus Gl. (5.24) die Lösung $x(t) = C e^{-\gamma t}$ mit $C = c_1 + c_2$. Um eine zweite unabhängige Lösung zu finden, geht man zunächst von einem kleinen, aber nicht-verschwindenden $\delta := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ aus und entwickelt die Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[c_1 \left(1 + \delta t + \frac{1}{2} \delta^2 t^2 + \dots \right) + c_2 \left(1 - \delta t + \frac{1}{2} \delta^2 t^2 - \dots \right) \right] e^{-\gamma t} \\ &= \left[(c_1 + c_2) \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 t^2 + \dots \right) + (c_1 - c_2) \delta t \left(1 + \frac{1}{6} \delta^2 t^2 + \dots \right) \right] e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Setzen wir nun $c_1 + c_2 = C$ und $(c_1 - c_2)\delta = C'$ und bilden dann den Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ bei festgehaltenen Konstanten C und C' , erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C + C't) e^{-\gamma t}. \quad (5.26)$$

Auch in diesem Fall nähert sich die Masse ohne Oszillation der Ruhelage an, jedoch schneller als im Kriechfall.

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Wir betrachten jetzt ein N -Teilchen-System mit skleronomen Zwangsbedingungen und s Freiheitsgraden, das durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_s beschrieben werde. Wie am Ende von Abschnitt 4.5 diskutiert, können wir dann die ursprünglichen Koordinaten in der Form $\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s)$, d.h. ohne explizite Zeitabhängigkeit schreiben und erhalten für die kinetische Energie des Systems (vgl. Gl. (4.102))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}. \quad (5.27)$$

Im Folgenden nehmen wir außerdem an, dass die auf die Teilchen wirkenden Kräfte konservativ sind, d.h. aus einem Potenzial $V(q_1, \dots, q_s)$ abgeleitet werden können.

Wir interessieren uns wieder für die Gleichgewichtspunkte des Systems und deren Umgebung und untersuchen dazu die Bewegungsgleichungen. Um die Notation zu vereinfachen, fassen wir die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten zu s -komponentigen Vektoren zusammen:

$$q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Die Lagrange-Funktion des Systems ist dann

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q), \quad (5.29)$$

und wir erhalten für die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k, \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right), \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}. \quad (5.32)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{k,\ell=1}^s \left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0. \quad (5.33)$$

Daraus folgt, dass die Gleichgewichtspunkte, d.h. die Punkte, an denen stationäre Lösungen $q(t) = q_0 = \text{const.}$, also $\dot{q} = 0$ und $\ddot{q} = 0$, existieren, die Bedingung

$$\left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} \quad (5.34)$$

erfüllen müssen.

Wie im eindimensionalen Fall können die Gleichgewichtspunkte stabil oder labil sein. Allerdings ist die Situation komplizierter, da es nun s Koordinaten gibt. Ein stabiles Minimum liegt vor, wenn am Gleichgewichtspunkt die Hesse-Matrix, also die aus den zweiten Ableitungen

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} \quad (5.35)$$

gebildete Matrix, positiv definit ist, d.h. nur positive Eigenwerte besitzt. Diese aus der Mathematik für Funktionen mehrerer Veränderlicher bekannte Tatsache werden wir später auch mit einem physikalischen Argument bestätigen. Wir betrachten nun wieder kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage. Die generalisierten Koordinaten können o.B.d.A. so gewählt werden, dass das Gleichgewicht bei $q = 0$ liegt, d.h. $q_0 \equiv 0$. Die Koordinaten q_k geben dann direkt die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage an. Ferner können wir das Potenzial am Gleichgewichtspunkt gleich null setzen: $V(0) = 0$. Eine Taylor-Entwicklung um diesen Punkt liefert dann

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_{q=0} q_k q_\ell + \dots \quad (5.36)$$

Für kleine Auslenkungen können wir die höheren Ordnungen vernachlässigen, d.h. wir erhalten

$$V(q) \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} := \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_{q=0}. \quad (5.37)$$

Für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad (5.38)$$

entwickeln wir

$$m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_n \left. \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_n} \right|_{q=0} q_n + \dots \quad (5.39)$$

Da in der Nähe der Gleichgewichtslage die Kräfte und damit die Beschleunigungen klein sind, würden hohe Geschwindigkeiten unweigerlich dazu führen, dass sich das System nach kurzer Zeit weit vom Gleichgewicht entfernt. Wenn wir uns auf die Beschreibung kleiner Auslenkungen um eine stabile Gleichgewichtslage beschränken wollen, müssen wir daher annehmen, dass die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_k ebenfalls klein sind. Die kinetische Energie T ist daher schon in führender Ordnung, $m_{k\ell}(q) \approx m_{k\ell}(0)$ quadratisch in kleinen Größen, so dass wir höhere Ordnungen der Entwicklung von $m_{k\ell}(q)$ vernachlässigen können:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s M_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \text{mit} \quad M_{k\ell} := m_{k\ell}(0). \quad (5.40)$$

In dieser Näherung hängt die kinetische Energie also nur von \dot{q} ab, während sie i.A. auch von q abhängt (s. Gl. (5.38)).

Für die Lagrangefunktion erhalten wir damit

$$L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s (M_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell} q_k q_\ell) \quad (5.41)$$

und für deren Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \ddot{q}_k, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^s K_{jk} q_k. \quad (5.43)$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\sum_{k=1}^s (M_{jk} \ddot{q}_k + K_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.44)$$

Wir können die $K_{k\ell}$ und $M_{k\ell}$ als Matrixelemente der symmetrischen Matrizen $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ auffassen und T , V und L kompakt als

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q}, \quad V = \frac{1}{2} q^T \underline{\underline{K}} q \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{2} (\dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}} q) \quad (5.45)$$

schreiben. Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich dann

$$\underline{\underline{M}} \ddot{q} + \underline{\underline{K}} q = 0. \quad (5.46)$$

Diese bilden ein System von s linearen homogenen Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Um es zu lösen, machen wir den Ansatz

$$q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t} \quad (5.47)$$

mit einem konstanten Vektor \tilde{q} und einer konstanten Kreisfrequenz ω . Einsetzen in Gl. (5.46) liefert

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \tilde{q} = 0. \quad (5.48)$$

Das ist ein homogenes lineares System von s Gleichungen für die s Komponenten von \tilde{q} . Dieses hat nur dann nicht-triviale Lösungen $\tilde{q} \neq 0$, wenn die Gleichungen linear abhängig sind, d.h. wenn

$$\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0. \quad (5.49)$$

Diese Gleichung nennt man *Säkulargleichung* und kann als eine verallgemeinerte Eigenwertgleichung aufgefasst werden.²³ Die linke Seite ist ein Polynom s -ten Grades in ω^2 . Es gibt also s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 , $j = 1, \dots, s$, mit zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{q}^{(j)}$. Dabei bezeichnet man ω_j als die *Eigenfrequenzen* des Systems, die $\tilde{q}^{(j)}$ als die *Normalmoden*.

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis):

- $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- Die Eigenvektoren $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.
- Man kann die Eigenvektoren folgendermaßen normieren:

$$\tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = 1. \quad (5.50)$$

- Es gilt dann die verallgemeinerte Orthogonalität

$$\tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \delta_{ij}, \quad (5.51)$$

- $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ bildet eine Basis des s -dimensionalen Raums der generalisierten Koordinaten.

²³ Vgl. gewöhnliche Eigenwertgleichungen: $\underline{\underline{A}}v = \lambda v \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda) = 0$.

- Aus der verallgemeinerten Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)} \quad (5.52)$$

folgt durch Multiplikation von links mit $\tilde{q}^{(j)T}$:

$$\tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} \stackrel{(5.50)}{=} \omega_j^2. \quad (5.53)$$

Wenn wir um einen stabilen Gleichgewichtspunkt, d.h. um ein lokales Minimum von V entwickeln, ist $\underline{\underline{K}}$ positiv definit,²⁴ d.h. $q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q . Daraus folgt

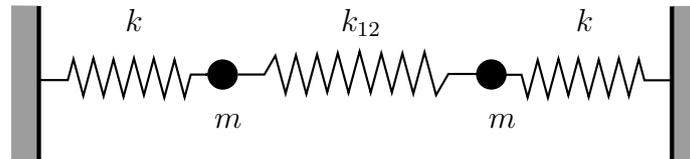
$$\omega_j^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.54)$$

Würden wir dagegen um einen labilen Gleichgewichtspunkt entwickeln, wäre $\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit, und es gäbe auch imaginäre Eigenfrequenzen $\omega_j = \pm i|\omega_j|$. Einsetzen in den Ansatz, Gl. (5.47) liefert dann Lösungen der Form

$$q(t) = a e^{-|\omega_j|t} + b e^{+|\omega_j|t}. \quad (5.55)$$

Der zweite Term wächst exponentiell mit der Zeit an, und es kommt daher zu einer Instabilität, bei der sich die Lösung schließlich so weit vom Gleichgewichtspunkt entfernt, dass die durchgeführten Näherungen nicht mehr gelten.

Beispiel: zwei gekoppelte eindimensionale Oszillatoren



Wir betrachten nur longitudinale Bewegungen entlang der Verbindungslinie. Als generalisierte Koordinaten wählen wir die Auslenkungen q_k , $k = 1, 2$, der k -ten Masse aus der Gleichgewichtslage.

²⁴ Wie man aus Gl. (5.37) erkennt, entspricht $\underline{\underline{K}}$ gerade der bereits erwähnten Hesse-Matrix, Gl. (5.35).

Die kinetische Energie ist also

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (5.56)$$

und die potenzielle Energie

$$V = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}k_{12}(q_1 - q_2)^2. \quad (5.57)$$

Das können wir schreiben als

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q} \quad (5.58)$$

und

$$V = \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}q^T \underline{\underline{K}} q \quad (5.59)$$

mit $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ und

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Die Säkulargleichung lautet dann

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \\ &= \det \begin{pmatrix} k + k_{12} - \omega^2 m & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \omega^2 m \end{pmatrix} \\ &= (k + k_{12} - \omega^2 m)^2 - k_{12}^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\Rightarrow \omega^2 m - k - k_{12} = \pm k_{12}, \quad (5.62)$$

d.h. die quadrierten Eigenfrequenzen sind

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m}. \quad (5.63)$$

Um die zugehörigen Eigenfunktionen zu bestimmen, setzen wir die Eigenfrequenzen in die verallgemeinerte Eigenwertgleichung (5.48) ein. Für ω_1 erhält man

$$\begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} \\ \tilde{q}_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

was zwei Gleichungen entspricht. Da diese jedoch linear abhängig sind, genügt es, die erste zu lösen:

$$(k+k_{12})\tilde{q}_1^{(1)} - k_{12}\tilde{q}_2^{(1)} = k\tilde{q}_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^{(1)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Für die Normierung ergibt sich mit Gl. (5.50)

$$\mathcal{N}^2 (1, 1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{N}^2 2m \stackrel{!}{=} 1, \quad (5.66)$$

so dass

$$\tilde{q}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Analog findet man für die zweite Normalmode

$$\tilde{q}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Multipliziert man die beiden Lösungen gemäß Gl. (5.47) mit $e^{i\omega_j t}$, sieht man dass $\tilde{q}^{(1)}$ einer Mode entspricht, bei der beide Massen gleichphasig schwingen, d.h. ihr gegenseitiger Abstand bleibt bei der Schwingung konstant und gleich dem Abstand in der Ruhelage. Die mittlere Feder wird daher nicht ausgelenkt, was erklärt, warum k_{12} nicht in die Eigenfrequenz ω_1 eingeht. Dagegen entspricht $\tilde{q}^{(2)}$ einer Mode, bei der die Massen gegenphasig schwingen, also sich also jeweils in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Dabei ändert sich natürlich ihr Abstand, so dass ω_2 auch von k_{12} abhängt.

Wie wir gesagt haben, bildet $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ eine orthogonale Basis des Raums der generalisierten Koordinaten. Wir können also jeden Vektor $q(t)$ in folgender Form darstellen:

$$q(t) = \sum_{j=1}^s \eta_j(t) \tilde{q}^{(j)} \quad (5.69)$$

Die $\eta_j(t)$ bezeichnet man dabei als die *Normalkoordinaten* des Systems.

Für die Lagrange-Funktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (\dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}} q) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \dot{\eta}_i(t) \dot{\eta}_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)}}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \eta_i(t) \eta_j(t) \underbrace{\tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)}}_{\omega_j^2 \tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \delta_{ij}}, \quad (5.70) \end{aligned}$$

d.h.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (\dot{\eta}_j^2(t) - \omega_j^2 \eta_j^2(t)). \quad (5.71)$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.72)$$

Bezüglich der Basis $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ verhält sich das System also wie s vollständig entkoppelte harmonische Oszillatoren. Insbesondere sind die allgemeinen Lösungen durch

$$\eta_j(t) = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (5.73)$$

gegeben, wobei die Amplituden A_j und die Phasen φ_j durch $2s$ Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen.

Teil II

Klassische Elektrodynamik

Kapitel 6

Elektrostatik

Im zweiten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Elektrodynamik, also der Theorie, die die Kräfte beschreibt, die geladene Teilchen und – damit verbunden – elektrische Ströme aufeinander ausüben. In diesem Kapitel beschränken wir uns dabei auf statische, also zeitlich konstante Ladungsverteilungen. Die dabei auftretenden Kräfte werden durch das Coulomb-Gesetz beschrieben, das dem Gravitationsgesetz formal sehr ähnlich ist.²⁵ Abgesehen davon, dass sich Ladungen auch abstoßen können, ist daher auf den ersten Blick wenig Neues zu erwarten.

Auf der formalen Ebene gehen wir jedoch einen Schritt weiter, indem wir die Fernwirkung, die z.B. zwei räumlich getrennte Ladungen auf einander ausüben, durch die Wirkung eines den ganzen Raum erfüllenden elektrischen Feldes interpretieren. Dies wird sich später bei der Beschreibung zeitabhängiger Probleme als sehr nützlich erweisen, da die Felder dort ein „Eigenleben“ entwickeln und als elektromagnetischer Wellen durch den Raum propagieren.

6.1 Grundlagen: Ladungen und das Coulomb-Gesetz

Zu den Grundgrößen der Mechanik, Länge, Zeit und Masse, kommt in der Elektrodynamik die *Ladung* als vierte Grundgröße hinzu. Analog zu den Massenverteilungen in der Mechanik betrachten wir sowohl Punktladungen, bei denen eine bestimmte Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{(i)}$ konzentriert ist, als auch kontinuierliche Ladungsverteilungen. Mikroskopisch gesehen werden Ladungen von (aus heutiger Sicht) punktförmigen Elementarteilchen in Einheiten der

²⁵Aus diesem Grund konnten wir in Kapitel 2 auch die Rutherford-Streuung und das Kepler-Problem im gleichen Formalismus behandeln.

der Elementarladung e (bei Quarks auch $e/3$) getragen,²⁶ so dass das Bild der Punktladungen – wie auch das der Punktmassen – letztlich das „richtige“ ist. Für makroskopische Systeme ist aber die kontinuierliche Beschreibung oft angemessener.

Ebenfalls analog zu den Massenverteilungen definieren wir die *Gesamtladung* eines Systems als Summe über die Punktladungen

$$Q = \sum_i q_i \quad (6.1)$$

oder kontinuierlich als Integral über die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in einem Volumen \mathcal{V} ,

$$Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\vec{r}). \quad (6.2)$$

Mit Hilfe der Dirac'schen δ -„Funktion“ lässt sich die Ladungsdichte auch für eine Punktladung am Ort $\vec{r}^{(i)}$ angeben:

$$\rho_i(\vec{r}) = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}) \quad (6.3)$$

und entsprechend für mehrere Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i \rho_i(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}). \quad (6.4)$$

Für die Gesamtladung im Volumen \mathcal{V} ergibt sich dann²⁷

$$Q = \int_{\mathcal{V}} d^3r \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}) = \sum_{\vec{r}^{(i)} \in \mathcal{V}} q_i, \quad (6.7)$$

²⁶Für Elektronen gilt $q_e = -e$, für Up- und Down-Quarks $q_u = \frac{2}{3}e$ bzw. $q_d = -\frac{1}{3}e$. Das Proton besitzt die Ladung $q_p = +e$, ist jedoch nicht punktförmig sondern aus Quarks (und Gluonen) aufgebaut.

²⁷ Erinnerung:

Für „gutartige“ (also insbesondere stetige) Testfunktionen $f(x)$ gilt

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (6.5)$$

Analog gilt für dreidimensionale Argumente

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (6.6)$$

was dem erwarteten Ergebnis entspricht.

Die Definition der Gesamtladung ist vor allem deshalb physikalisch sinnvoll, weil Q für abgeschlossene Systeme eine Erhaltungsgröße ist,²⁸ d.h. die im Volumen \mathcal{V} enthaltene Gesamtladung kann sich nur ändern, wenn Ladungen von außen in das Volumen hinein- oder nach außen aus dem Volumen abfließen. Im Gegensatz zur Masse können Ladungen aber positiv und negativ sein, so dass die Erzeugung oder Vernichtung von Paaren entgegengesetzter Ladung grundsätzlich möglich ist.

Ein weiterer Unterschied zur Masse besteht darin, dass kein Zusammenhang zwischen Ladung und Trägheit gegenüber Beschleunigungen besteht: Wirkt auf ein Teilchen mit Masse m die Kraft \vec{F} , gilt nach dem 2. Newton'schen Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$, d.h. die Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung wird allein durch die Masse, nicht aber durch die Ladung bestimmt. Die Kraft selbst kann dagegen sehr wohl von der Ladung abhängen, die dann auf diese Weise gemessen werden kann.

Für zwei *ruhende* Punktladungen q_i und q_j gilt das *Coulomb'sche Gesetz*

$$\vec{F}^{(ij)} = k \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (6.8)$$

mit einer Proportionalitätskonstante $k > 0$. Dabei verwenden wir die gleiche Notation wie im Mechanik-Teil, d.h. $\vec{F}^{(ij)}$ ist die vom Teilchen j auf das Teilchen i ausgeübte Kraft, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}$ und $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$.

Es gilt also:

- Der Betrag der Kraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab.
- Die Richtung liegt entlang der Verbindungslinie.
- Ladungen mit gleichem Vorzeichen ($q_i q_j > 0$) stoßen sich ab, Ladungen mit ungleichem Vorzeichen ($q_i q_j < 0$) ziehen sich an.
- Es gilt $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$ („actio = reactio“)

Wie groß ist die Konstante k ? Die Antwort auf diese Frage hängt vom verwendeten Einheitensystem ab:

1. Variante:

Da Ladungen nur über ihre Kraftwirkungen messbar sind, können wir die Ladungseinheit so definieren, dass $k = 1$ gilt, also

$$|\vec{F}^{(ij)}| = \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}. \quad (6.9)$$

²⁸Im Rahmen der Quantenelektrodynamik kann man zeigen, dass die Ladungserhaltung über das Noether-Theorem mit einer Symmetrie zusammenhängt.

Für die Ladungseinheit würde dann gelten

$$[q^2] = [F r^2] = 1 \text{ N m}^2 = 1 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2} \quad \Rightarrow \quad [q] = 1 \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{3/2} \text{ s}^{-1}. \quad (6.10)$$

Zwei Ladungen dieser Einheit würden also m Abstand von einem Meter die Kraft $1N$ aufeinander ausüben. Die Wahl $k = 1$ wird von den meisten theoretischen Physikern bevorzugt, allerdings traditionell mit der Masseneinheit g und der Längeneinheit cm („Gauß'sches Einheitensystem“).

2. Variante:

Im *SI-Einheitensystem* ist die Einheit der Ladung dagegen 1 C (Coulomb), das von der Grundeinheit 1 A (Ampere) für die Stromstärke abgeleitet wird:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}. \quad (6.11)$$

Das Ampere wiederum ist über die magnetische Kraft definiert, die zwei parallel im Abstand 1 m angeordnete geradlinige, unendlich lange, unendlich dünne Leiter im Vakuum aufeinander ausüben: Fließt durch beide Leiter ein Strom der Stärke 1 A , dann beträgt die Kraft $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ pro Meter Leiterlänge.²⁹

Mit dieser Definition kann k natürlich nicht mehr frei gewählt, sondern muss gemessen werden (zumindest zunächst einmal). Man findet

$$k = 10^{-7} c^2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \text{mit} \quad c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad (6.12)$$

also genau der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Dieser Befund ist ein erster Hinweis darauf, dass zwischen elektrischen (Coulomb-Gesetz) und magnetischen (Definition des Ampere) Kräften einerseits und der Natur des Lichts andererseits ein Zusammenhang besteht! Am Ende der Vorlesung werden wir das genauer verstehen.³⁰

Üblicher Weise schreibt man

$$k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \quad (6.13)$$

²⁹ Auf magnetische Kräfte werden wir in Kapitel 7 noch genauer eingehen.

³⁰ Seit 1983 ist die Lichtgeschwindigkeit c keine Messgröße mehr, sondern wird definitionsgemäß auf den in Gl. (6.12) angegebenen Wert gesetzt. Folglich ist auch k keine Messgröße mehr, sondern über Gl. (6.12) exakt festgelegt. (Der Vorfaktor hängt mit der Definition des Ampere zusammen und ist daher ebenfalls exakt.) Im Bestreben, die Definition von Maßeinheiten möglichst weitgehend auf unveränderliche Naturkonstanten zurückzuführen, wird gegenwärtig darüber nachgedacht, in einer zukünftigen Neudefinition das Coulomb über die Elementarladung e zu definieren. Während letztere zurzeit noch eine Messgröße ist, deren Wert in Coulomb eine gewisse Ungenauigkeit besitzt, würde e dann auf einen bestimmten Wert festgesetzt.

mit der *elektrischen Feldkonstanten* oder *Influenzkonstanten*

$$\varepsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2} = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (6.14)$$

Dabei haben wir die Einheit *Volt*,

$$1\text{V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \quad (6.15)$$

eingeführt.

Im Folgenden verwenden wir SI-Einheiten. Das Coulomb-Gesetz lautet dann also

$$\vec{F}^{(ij)} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (6.16)$$

Wie schon erwähnt, hat es große Ähnlichkeiten mit dem Gravitationsgesetz ($-Gm_1m_2 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2$). Ein wichtiger Unterschied ist allerdings, dass es nur für ruhende Ladungen gilt, weil ansonsten noch magnetische Kräfte hinzu kommen.

Eine wichtige Gemeinsamkeit mit dem Gravitationsgesetz ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips, d.h. die von mehreren Ladungen q_j auf q_i ausgeübten Kräfte können vektoriell addiert werden:

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}^{(ij)} = \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (6.17)$$

6.2 Das elektrische Feld

Ausgehend von Gl. (6.17) können wir die Kraft auf die Ladung q_i in der Form

$$\vec{F}^{(i)} = q_i \vec{E}^{(i)}(\vec{r}^{(i)}) \quad (6.18)$$

schreiben, wobei

$$\vec{E}^{(i)}(\vec{r}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (6.19)$$

das *von allen anderen Ladungen* am Ort $\vec{r}^{(i)}$ erzeugte *elektrische Feld* ist. Dies ist zunächst nur eine triviale Aufspaltung, die jedoch mit einer neuen physikalischen Interpretation verbunden ist: Die Ladungen q_j erzeugen im gesamten Raum unabhängig von q_i ein Feld, auf das die Ladung q_i am Ort $\vec{r}^{(i)}$ dann *lokal* reagiert. Dabei erzeugt jede Punktladung q_j ein Feld

$$\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{q_j}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}^{(j)}}{|\vec{r} - \vec{r}^{(j)}|^3}, \quad (6.20)$$

das sich nach dem Superpositionsprinzip mit den Feldern aller anderen Ladungen zum Gesamtfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r}) \quad (6.21)$$

überlagert. Dazu trägt auch die Ladung q_i bei, die wir für die Kraftwirkung auf sich selbst weglassen mussten. Mathematisch sauberer definiert man das elektrische Feld am Ort \vec{r} daher über die fiktive Kraft, die eine infinitesimal kleine Testladung q am Ort \vec{r} erfährt, deren eigener Beitrag zum Feld vernachlässigt werden kann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (q > 0). \quad (6.22)$$

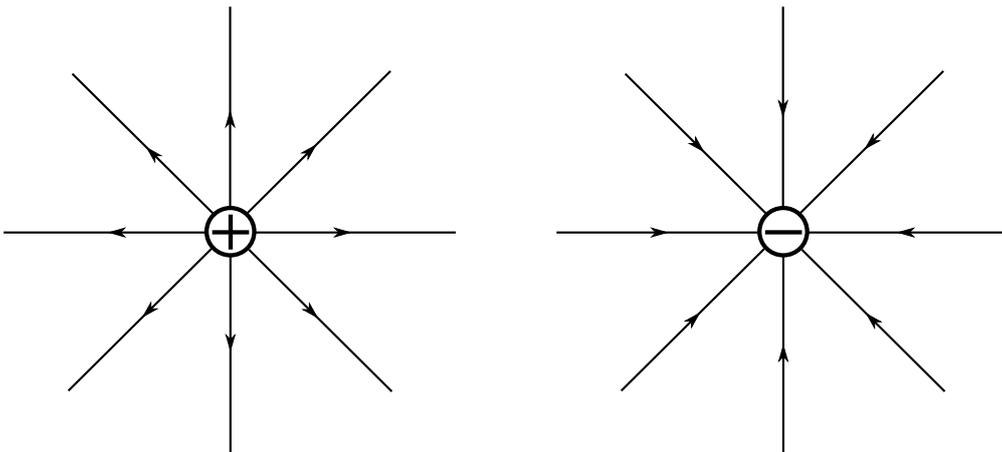
Für die Einheit der elektrischen Feldstärke gilt entsprechend

$$[\vec{E}] = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (6.23)$$

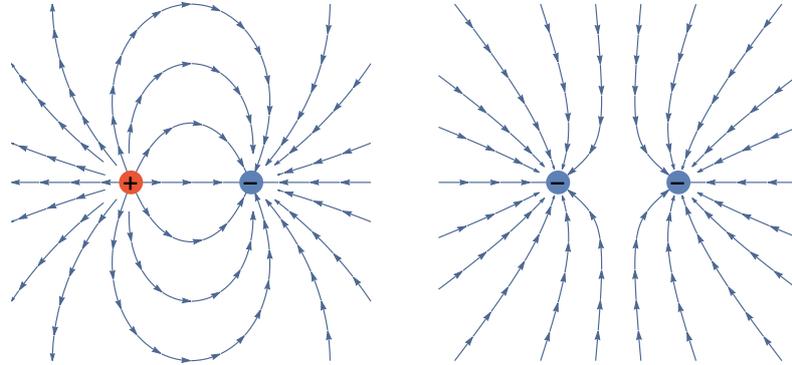
Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld, d.h. jedem Raumpunkt \vec{r} wird ein Vektor $\vec{E}(\vec{r})$ zugeordnet. Nach einer Idee von Faraday kann man sich das Feld durch *Feldlinien* veranschaulichen, die so verlaufen, dass die Tangenten an jedem Punkt jeweils die Richtung von $\vec{E}(\vec{r})$ anzeigen.

Beispiele:

- einzelne positive / negative Punktladung



- zwei entgegengesetzte Punktladungen / gleiche Punktladungen



Da die Richtung des \vec{E} -Feldes an jedem Punkt eindeutig ist (außer an Orten, an denen sich Punktladungen befinden), schneiden sich die Feldlinien nie.

Für das elektrische Feld von N Punktladungen ergibt sich aus Gln. (6.20) und (6.21)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}^{(j)}}{|\vec{r} - \vec{r}^{(j)}|^3}. \quad (6.24)$$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilung liefert

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.25)$$

Dies beinhaltet auch wieder den Fall der Punktladungen, wenn wir $\rho(\vec{r}') = \sum_j q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}^{(j)})$ setzen.

Analog zur Gravitationskraft können wir die Coulomb-Kraft und entsprechend das elektrische Feld aus einem $\frac{1}{r}$ -Potenzial herleiten. Allgemein gilt

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.26)$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \quad (6.27)$$

mit dem *elektrostatischen Potenzial*

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.28)$$

Analog gilt für eine Kraft auf eine Testladung q

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}). \quad (6.29)$$

Genau genommen sollte man $V(\vec{r})$ als „potenzielle Energie“ der Testladung am Ort \vec{r} bezeichnen, und $\phi(\vec{r})$ als das „Potenzial“. Es hat sich aber eingebürgert, auch $V(\vec{r})$ als „Potenzial“ zu bezeichnen, so wie wir es zuvor auch schon gemacht haben.

Wie wir gesehen haben, sind aus einem Potenzial ableitbare Kräfte konservativ:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0} \quad (6.30)$$

und entsprechend

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{0} \quad (6.31)$$

Damit ist das Linienintegral über \vec{E} wegunabhängig:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)) \equiv -U(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (6.32)$$

mit der *Spannung*

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) := \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0), \quad [U] = 1 \text{ V}. \quad (6.33)$$

Wie wir schon im Zusammenhang mit V gesehen haben, ist ϕ nur bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt, da der Gradient einer Konstanten verschwindet und daher ϕ und $\phi' = \phi + \text{const.}$ auf das gleiche elektrische Feld führen. Diese Freiheit bei der Wahl der Konstanten ist der einfachste Spezialfall einer so genannten *Eich-Freiheit*, bei der unterschiedliche Potenziale die gleiche Physik beschreiben. Aus diesem Grund kann das Potenzial auch nicht vollständig gemessen werden. Spannungen, also Potenzial-Differenzen, sind dagegen messbar.

6.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Nach einem allgemeinen Theorem lassen sich Vektorfelder, die hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden, eindeutig aus ihren Quellen und Wirbeln rekonstruieren. Sei \vec{A} ein beliebiges Vektorfeld. Um die Quellen zu beschreiben, betrachtet man den Fluss Φ des Feldes durch die Oberfläche eines vorgegebenen Volumens, der nach dem Gauß'schen Satz mit der Divergenz des Feldes zusammenhängt:

$$\Phi = \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) \quad (6.34)$$

Für die Wirbel bestimmt man die Zirkulation Γ entlang eines geschlossenen Weges, die nach dem Stokes'schen Satz mit der Rotation auf einer vom Weg begrenzten Fläche zusammenhängt:

$$\Gamma = \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S d\vec{\sigma} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad (6.35)$$

Aus diesem Grund sind die Divergenz und die Rotation des Feldes (in unserem Fall des elektrischen Feldes \vec{E}) von großem Interesse. Für die Rotation haben wir schon gesehen, dass

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0. \quad (6.36)$$

Für die Divergenz gilt zunächst

$$\text{div } \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = -\Delta \phi \quad (6.37)$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.38)$$

(in kartesischen Koordinaten).

Es folgt also

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \Delta \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Für die weitere Auswertung zeigen wir nun, dass

$$\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (6.40)$$

d.h. wir zeigen:

- i) $\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$, falls $\vec{r} \neq \vec{r}'$
- ii) $\int_{\mathcal{V}} d^3 r \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi$, falls $\vec{r}' \in \mathcal{V}$

Wir können dabei das Koordinatensystem so verschieben, dass $\vec{r}' = \vec{0}$ gilt, d.h. es genügt zu zeigen, dass

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 r \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{r} = -4\pi, \quad \text{falls } \vec{0} \in \mathcal{V}.$$

Beweis:

i) Sei $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

Dann gilt

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.41)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{r_i - r'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - 3 \frac{(r_i - r'_i)^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right) \\ &= -3 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} = 0. \quad \text{q.e.d.} \quad (6.42) \end{aligned}$$

ii) Sei \mathcal{V} ein Volumen, das den Ursprung enthält.

Wegen i) gilt $\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{r} = 0$ für alle $\vec{r} \neq \vec{0}$. Wir können das Volumen \mathcal{V} daher durch eine Kugel \mathcal{K} ersetzen, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{r} = \int_{\mathcal{K}} d^3r \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{r} = - \int_{\partial\mathcal{K}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (6.43)$$

Die Kugel habe den Radius R . Dann gilt auf der Kugeloberfläche

$$\vec{r} = R\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r}{R^2} \quad (6.44)$$

und für das Flächenelement

$$d\vec{\sigma} = r^2 d\Omega \vec{e}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r. \quad (6.45)$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{r} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta R^2 \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2} = -4\pi \quad \text{q.e.d.} \quad (6.46)$$

Damit haben wir Gl. (6.40) bewiesen. Einsetzen in Gl. (6.39) liefert dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (6.47)$$

Gln. (6.47) und (6.36) nennt man die
Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in differenzieller Darstellung:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}} \quad (6.48)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen bzw. Stokes'schen Satzes folgt daraus

$$\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (6.49)$$

und

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{S}} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) = 0. \quad (6.50)$$

Das sind die

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in integraler Darstellung:

$$\boxed{\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \oint_{\partial\mathcal{S}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0.} \quad (6.51)$$

Die erste dieser Gleichungen bezeichnet man auch als „physikalischen Gauß'schen Satz“ oder „Gauß'sches Gesetz“ :

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens \mathcal{V} ist proportional zur im Volumen enthaltenen Gesamtladung.

An den Maxwell-Gleichungen erkennt man, dass das elektrostatische Feld wirbelfrei ist ($\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$) und dass seine Quellen und Senken durch positive bzw. negative Ladungen gebildet werden. Letzteres ist im Einklang mit dem Feldlinien-Bild.

Mit Gl. (6.37) folgt schließlich die *Poisson-Gleichung* für das elektrostatische Potenzial:

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})} \quad (6.52)$$

In ladungsfreien Raumbereichen ($\rho(\vec{r}) = 0$) gilt die *Laplace-Gleichung*:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = 0. \quad (6.53)$$

Es gilt dann:

Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
 = eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung
 + die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung.

Falls keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen und ϕ für eine endliche Ladungsverteilung im Unendlichen verschwinden soll, ist die Lösung durch Gl. (6.28),

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.54)$$

gegeben. Mit Hilfe von Gl. (6.40) kann man leicht überprüfen, dass dieser Ausdruck in der Tat die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') (-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (6.55)$$

Häufig liegt jedoch die Situation vor, dass $\phi(\vec{r})$ (oder seine Ableitungen) auf der Oberfläche eines Volumens \mathcal{V} vorgegeben sind, z.B. im Fall einer leitenden Oberfläche. Es ist dann eine Lösung gesucht, die im Einklang mit diesen Randbedingungen die Poisson-Gleichung löst („Randwertproblem der Elektrostatik“). Darauf werden wir in Abschnitt 6.7 noch genauer eingehen.

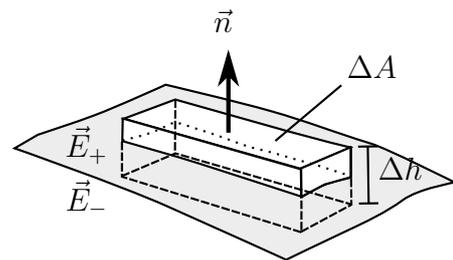
6.4 Feldverhalten an Grenzflächen

An der Grenzfläche zweier Medien können sich manchmal Ladungen in einer sehr dünnen Schicht ansammeln, die man idealisiert als unendlich dünn ansehen kann. Man definiert dann die *Flächenladungsdichte*

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad (6.56)$$

mit dem infinitesimalen Flächenelement dA .

Wir wollen nun untersuchen, wie sich das elektrische Feld an einer solchen Grenzfläche verhält. Dazu legen wir ein Kästchen ΔV mit Höhe Δh und Ober- und Unterseite der Fläche ΔA um die Grenzfläche, so dass die Kante der Länge Δh parallel zur Flächennormalen \vec{n} liegt.



Die Höhe Δh lassen wir dann in einem Grenzprozess gegen null gehen. Die Fläche ΔA müssen wir dabei ebenfalls kleiner werden lassen, jedoch nur so viel wie nötig ist, damit die Grenzfläche weiterhin stets durch die Seitenwände verläuft. Am Ende wird das Kästchen auf diese Weise immer flacher, d.h. die Seitenflächen sind gegenüber ΔA vernachlässigbar.

Es gilt dann³¹

$$\int_{\Delta V} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\partial\Delta V} d\vec{S} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \Delta A \vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-), \quad (6.57)$$

wobei \vec{E}_+ und \vec{E}_- die elektrischen Felder unmittelbar oberhalb bzw. unmittelbar unterhalb der Grenzfläche sind (bezogen auf die Richtung des Vektors \vec{n}).

Andererseits gilt

$$\int_{\Delta V} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \quad (6.58)$$

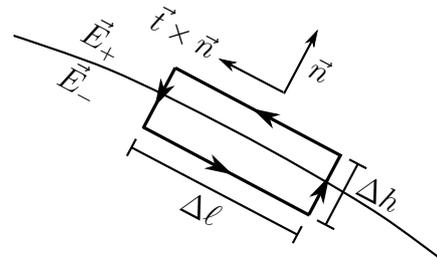
mit der in ΔV eingeschlossenen Ladung $\Delta Q = \sigma \Delta A$.
Gleichsetzen der rechten Seiten liefert dann

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (6.59)$$

d.h. es gilt:

- Die Normalkomponente des elektrischen Feldes ist an der geladenen Grenzfläche unstetig.

Um die Tangentialkomponente zu untersuchen, betrachten wir eine geschlossene Rechteckschleife $\Delta\mathcal{F} = \Delta h \Delta\ell$, wobei Δh wie zuvor senkrecht durch die Grenzfläche laufe und $\Delta\ell$ parallel zur Grenzfläche verlaufe. Wie zuvor sei \vec{n} der Normalen-Einheitvektor senkrecht zur Grenzfläche. Ferner sei \vec{t} der Normalen-Einheitvektor auf der orientierten Fläche $\Delta\mathcal{F}$.



Es folgt dann

$$0 = \int_{\Delta\mathcal{F}} d\vec{S} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=\vec{0}} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial\Delta\mathcal{F}} d\vec{r} \cdot \vec{E} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \Delta\ell (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \quad (6.60)$$

und somit

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0. \quad (6.61)$$

³¹Um Verwechslungen mit der Flächenladungsdichte σ zu vermeiden, bezeichnen wir hier das gerichtete Flächenelement, das wir bislang $d\vec{\sigma}$ genannt haben, mit $d\vec{S}$.

Der Vektor $(\vec{t} \times \vec{n})$ verläuft parallel zur Richtung von $\Delta\ell$ und damit tangential zur Grenzfläche. Da wir beliebig vorgeben können, in welche Richtung $\Delta\ell$ tangential zur Grenzfläche zeigt, gilt allgemein:

- Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes verhält sich an der geladenen Grenzfläche stetig.

6.5 Elektrostatische Feldenergie

Wir haben bereits gesehen, dass das elektrische Feld konservativ ist. Um eine Punktladung q im Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (6.62)$$

von \vec{r}_0 nach \vec{r} zu verschieben, muss die Arbeit

$$\Delta W = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') = q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}') = q(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)) \equiv qU(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (6.63)$$

geleistet werden. Das Minuszeichen nach dem ersten Gleichheitszeichen muss deshalb eingeführt werden, weil es nicht um die Arbeit geht, die das elektrische Feld an der Ladung leistet, sondern um die Arbeit, die wir leisten, wenn wir die Ladung gegen die Kraft verschieben. Entsprechend erhöht sich dabei die Energie des Systems um ΔW .

Im Folgenden setzen wir $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$. Die Energie einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ kann dann definiert werden als die Arbeit, die geleistet werden muss, alle Ladungen aus dem Unendlichen an die jeweiligen Orte zu verschieben, die der Ladungsverteilung entsprechen.³²

Wir betrachten zunächst N Punktladungen. Das Verschieben der ersten Punktladung q_1 and seinen Ort $\vec{r}^{(1)}$ kostet keine Energie. Sind bereits $i-1$ Teilchen an den Orten $\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(i-1)}$, erzeugen sie das Potenzial

$$\phi^{(<i>i)</i>}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}^{(j)}|}. \quad (6.64)$$

Um das i -te Teilchen an den Ort $\vec{r}^{(i)}$ zu bringen, muss dann die Energie

$$W^{(i)} = q_i \phi^{(<i>i)</i>}(\vec{r}^{(i)}) \quad (6.65)$$

³²Genauer gesagt, gehen wir davon aus, dass die einzelnen Ladungen vor der Verschiebung jeweils unendlich weit voneinander entfernt sind.

aufgewendet werden. Für N Punktladungen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N W^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}|} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}^{(i)} - \vec{r}^{(j)}|}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf kontinuierliche Ladungsverteilungen liefert

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.67)$$

Allerdings haben wir hier den Fall $\vec{r} = \vec{r}'$ nicht explizit ausgenommen. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Mit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.68)$$

und der Poisson-Gleichung erhält man

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \phi(\vec{r}) \Delta \phi(\vec{r}). \quad (6.69)$$

Mit Hilfe der Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \phi \Delta \phi \quad (6.70)$$

folgt daraus

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \underbrace{(\vec{\nabla} \phi(\vec{r}))^2}_{= \vec{E}^2}. \quad (6.71)$$

Der erste Term kann über den Gauß'schen Satz in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot (\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot (\phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})). \quad (6.72)$$

Da wir über den gesamten Raum integrieren und $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$, verschwin-

det dieser Anteil.³³ Wir erhalten also

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}). \quad (6.74)$$

Das kann man auch schreiben als

$$W = \int d^3r w(\vec{r}) \quad (6.75)$$

mit der *Energiedichte des elektrostatischen Feldes*

$$w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r}). \quad (6.76)$$

Beispiel: homogen geladene Kugel

Die Kugel habe den Radius R und die Gesamtladung Q . Für das \vec{E} -Feld gilt dann (s. Hausübung):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} f(r) \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad f(r) = \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases} \quad (6.77)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 4\pi \left\{ \int_0^R r^2 dr \frac{r^2}{R^6} + \int_R^\infty r^2 dr \frac{1}{r^4} \right\} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Daraus können wir die Energie einer Punktladung berechnen, indem wir den Grenzübergang $R \rightarrow 0$ bilden. Offensichtlich gilt

$$W_{\text{Punktladung}} = \lim_{R \rightarrow 0} W_{\text{Kugel}} \rightarrow \infty, \quad (6.79)$$

d.h. die Energie divergiert! Man müsste also unendlich viel Energie aufwenden, um eine nicht-verschwindende Ladung auf einen Punkt zu konzentrieren. Dadurch wird das Konzept einer Punktladung natürlich zunächst einmal fragwürdig. Andererseits konnte z.B. für Elektronen bislang keinerlei

³³ Genau genommen, müssen wir annehmen, dass die Ladungsverteilung auf einen endlichen Raumbereich begrenzt ist. In großer Entfernung gilt dann

$$\phi \sim \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\nabla}\phi| \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \phi |\vec{\nabla}\phi| \sim \frac{1}{r^3}. \quad (6.73)$$

Das fällt schneller ab, als das Flächenelement $|d\vec{\sigma}| = r^2 d\Omega$ ansteigt, so dass das Oberflächenintegral für $r \rightarrow \infty$ verschwindet.

Ausdehnung nachgewiesen werden.³⁴ Wir können uns daher auf den pragmatischen Standpunkt stellen, dass diese unendliche (oder sehr große) „Selbstenergie“ bei der Erzeugung der Teilchen irgendwie aufgebracht worden ist und anschließend keine Rolle für die Dynamik des Systems spielt, solange die Teilchen stabil bleiben. Man kann sie dann einfach weglassen. Genau das haben wir gemacht, als wir die elektrostatische Energie für N unendlich weit entfernte Punktladungen auf null gesetzt haben. Zur Beschreibung von Elektronen ist die klassische Elektrodynamik natürlich nicht mehr ausreichend. Im Rahmen der Quantenelektrodynamik treten jedoch ebenfalls divergente Selbstenergien auf, die sinngemäß auf ähnliche Weise behandelt werden. Die Tatsache, dass wir bei der Behandlung der Punktladungen die (divergenten) Selbstenergien nicht berücksichtigt haben, hat nicht nur quantitative, sondern auch qualitative Konsequenzen: Während der Kontinuumsausdruck, Gl. (6.74), stets positiv ist, kann der Ausdruck für Punktladungen, Gl. (6.66), auch negativ werden. Der Unterschied liegt in der Tat in den Selbstenergien, die ja immer positiv sind. Um das genauer herauszuarbeiten, schreiben wir die Ladungsdichte für N Punktladungen als

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\vec{r}), \quad \rho_i(\vec{r}) = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}). \quad (6.80)$$

Aus dem ursprünglichen Ausdruck für die kontinuierliche Ladungsverteilung, Gl. (6.67), ergibt sich dann

$$W = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_i(\vec{r})\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \sum_{i,j=1}^N W_{ij} = W_{\text{selbst}} + W_{WW} \quad (6.81)$$

mit

$$W_{\text{selbst}} = \sum_{i=1}^N W_{ii} \quad \text{und} \quad W_{WW} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N W_{ij}. \quad (6.82)$$

W_{WW} entspricht also genau unserem früheren Ergebnis für N Punktladungen, Gl. (6.66). Mit den gleichen Umformungen wie vorher lässt sich dieser Anteil durch die elektrischen Felder der einzelnen Punktladungen ausdrücken:

$$W_{WW} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \int d^3r \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j(\vec{r}) \quad (6.83)$$

³⁴ Historisch hat man versucht, die Ausdehnung des Elektrons dadurch abzuschätzen, dass man die elektrostatische Energie mit der relativistischen Ruheenergie $E = m_e c^2$ gleichsetzt (*klassischer Elektronenradius*). Dabei ergibt sich ein Wert der Größenordnung 10^{-15} m, während die experimentelle Obergrenze für die Ausdehnung des Elektrons heute bei 10^{-19} m liegt.

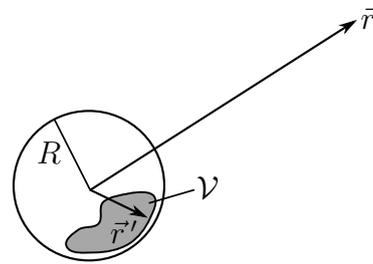
mit

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}^{(i)}}{|\vec{r} - \vec{r}^{(i)}|^3}. \quad (6.84)$$

Auch in dieser Form sieht man also, dass W_{WW} negativ werden kann. Für echte kontinuierliche Ladungsverteilungen ist eine eindeutige Zerlegung von W in W_{selbst} und W_{WW} dagegen nicht möglich, und W ist stets positiv.

6.6 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung, d.h. eine Ladungsverteilung, für die $\rho(\vec{r})$ nur innerhalb eines beschränkten Raumbereichs \mathcal{V} nicht verschwindet. \mathcal{V} liege vollständig innerhalb einer Kugel mit Radius R um den Koordinatenursprung. Der Ursprung selbst muss nicht notwendiger Weise in \mathcal{V} liegen, obwohl das in der Regel zweckmäßig und daher meistens der Fall ist.



Wir nehmen außerdem an, dass keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Für das Potenzial gilt dann

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.85)$$

Oft ist man nur an dem Verhalten in der Fernzone $r \gg R$ weit ab von der Ladungsverteilung interessiert. Da andererseits unter dem Integral $r' < R$ gilt, gilt $r' \ll r$. Das legt nahe, den Term $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ in eine Taylor-Reihe um $\vec{r}' = \vec{0}$ zu entwickeln. Oft genügen dann wenige Terme der Entwicklung, um $\phi(\vec{r})$ hinreichend gut zu beschreiben.

Zur Vorbereitung befassen wir uns zunächst allgemein mit der Taylor-Entwicklung von skalaren Feldern: Sei $f(\vec{r})$ eine Funktion von \vec{r} . Wir wollen $f(\vec{r} + \vec{a})$ in eine Taylor-Reihe um $f(\vec{r})$ entwickeln. Dazu verwenden wir kartesische Koordinaten, $f(\vec{r}) \equiv f(r_1, r_2, r_3)$, und schreiben

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = f(r_1 + a_1, r_2 + a_2, r_3 + a_3) \equiv F(\lambda = 1) \quad (6.86)$$

mit

$$F(\lambda) = f(r_1 + \lambda a_1, r_2 + \lambda a_2, r_3 + \lambda a_3) \quad (6.87)$$

und der Hilfsvariablen λ . Da F nur von einer Variablen abhängt, kann die Funktion auf bekannte Weise entwickelt werden:

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) \lambda^n. \quad (6.88)$$

Daraus folgt

$$F(\lambda = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(0). \quad (6.89)$$

Für die Ableitungen gilt nach Kettenregel:

$$F'(0) = \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial}{\partial r_j} f(\vec{r}) \quad (6.90)$$

$$F''(0) = \sum_{j,k=1}^3 a_k a_j \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} f(\vec{r}) = \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial r_j} \right)^2 f(\vec{r}) \quad (6.91)$$

$$\dots \quad (6.92)$$

$$F^{(n)}(0) = \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial r_j} \right)^n f(\vec{r}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{r}) \quad (6.93)$$

Es gilt also

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{r}). \quad (6.94)$$

Dies verwenden wir nun, um $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ zu entwickeln, d.h. wir betrachten den Fall $f(\vec{r}) = \frac{1}{r}$ und $\vec{a} = -\vec{r}'$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^n \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} - \dots \quad (6.95)$$

Mit

$$(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \sum_j r'_j \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{1}{r} = - \sum_j r'_j \frac{r_j}{r^3} = - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (6.96)$$

und

$$\begin{aligned} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} &= \sum_{j,k} r'_k \frac{\partial}{\partial r_k} \left(- \frac{r'_j r_j}{r^3} \right) = - \sum_{j,k} r'_j r'_k \left(\frac{\delta_{jk}}{r^3} - 3 \frac{r_j r_k}{r^5} \right) \\ &= - \frac{r'^2 r^2 - 3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^5} \end{aligned} \quad (6.97)$$

erhält man

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \dots \quad (6.98)$$

Damit ergibt sich für das Potenzial

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \right. \quad (6.99)$$

$$\left. + \frac{1}{2r^5} \int d^3r' \underbrace{(3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2)}_{\sum_{i,j} r_i r_j (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij})} \rho(\vec{r}') + \dots \right\}, \quad (6.100)$$

also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots \right\} \quad (6.101)$$

mit den folgenden *Multipolmomenten*:

$$\text{Monopolmoment:} \quad Q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \quad (= \text{Gesamtladung}) \quad (6.102)$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \quad (6.103)$$

$$\text{Quadrupolmomente:} \quad Q_{ij} = \int d^3r' (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') \quad (6.104)$$

Wie man sieht, ist die Information über die Ladungsverteilung ausschließlich in den Multipolmomenten enthalten, während die \vec{r} -Abhängigkeit des Potenzials vollständig durch die übrigen Faktoren gegeben ist. Dabei fallen die Beiträge der höheren Multipolmomente schneller mit dem Abstand ab als die niedrigeren:

- Monopol: $\sim \frac{1}{r}$
- Dipol: $\sim \frac{1}{r^2}$
- Quadrupol: $\sim \frac{1}{r^3}$
- ...

In sehr großer Entfernung wirkt die Ladungsverteilung daher wie eine Punktladung Q am Ursprung, da die höheren Multipolmomente vernachlässigt werden können. Rückt man näher an die Ladungsverteilung heran, werden mehr und mehr Terme wichtig.

Falls die Gesamtladung verschwindet, ist der Dipol-Anteil

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (6.105)$$

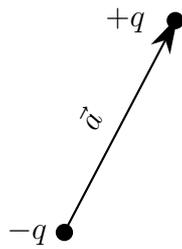
dominant.

Das einfachste Beispiel für eine solche Situation sind zwei entgegengesetzte Punktladungen im Abstand \vec{a} , z.B. $+q$ bei $\vec{r} = \vec{a}$ und $-q$ bei $\vec{r} = \vec{0}$. Die Ladungsdichte ist dann

$$\rho(\vec{r}) = q(\delta(\vec{r} - \vec{a}) - \delta(\vec{r})), \quad (6.106)$$

und wir erhalten für das Dipolmoment

$$\vec{p} = q\vec{a} - q\vec{0} = q\vec{a}. \quad (6.107)$$



Für das elektrische Feld eines reinen Dipols ergibt sich

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (6.108)$$

Beispiel:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \quad (6.109)$$

In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.110)$$

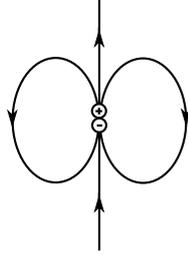
und damit

$$\vec{p} = p(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta). \quad (6.111)$$

Mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \vec{E}_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r - \frac{p}{r^3} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned} \quad (6.112)$$

Das entspricht dem folgenden Feldlinienverlauf:



$$\begin{aligned} \text{z.B. } \theta = 0 &\Rightarrow \vec{E}_D \sim 2\vec{e}_r(0) = 2\vec{e}_z \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \vec{E}_D \sim \vec{e}_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{e}_z \\ \theta = \pi &\Rightarrow \vec{E}_D \sim -2\vec{e}_r(\pi) = 2\vec{e}_z \end{aligned}$$

Für punktsymmetrische Ladungsverteilungen, $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$, gilt allgemein

$$\vec{p} = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}) \stackrel{\vec{r}' \equiv -\vec{r}}{=} \int d^3r' (-\vec{r}') \rho(-\vec{r}') = - \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = -\vec{p}. \quad (6.113)$$

Das ist nur möglich, wenn $\vec{p} = \vec{0}$ gilt:

- Punktsymmetrische Ladungsverteilungen besitzen kein Dipolmoment.

Verschwanden sowohl die Gesamtladung als auch das Dipolmoment, dominiert der Quadrupol-Beitrag zum Potenzial,

$$\phi_Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5}. \quad (6.114)$$

Die Komponenten Q_{ij} bilden einen Tensor, den Quadrupoltensor

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.115)$$

Genau wie der Trägheitstensor ist er symmetrisch,

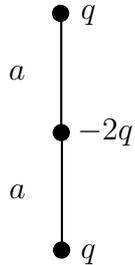
$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (6.116)$$

wie man direkt aus der Definition Gl. (6.104) erkennt. Außerdem verschwindet seine Spur:

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \underbrace{\sum_i (3r_i^2 - r^2)}_{3(x^2+y^2+z^2) - 3r^2 = 0} = 0. \quad (6.117)$$

Daher sind nur fünf der neun Komponenten von $\underline{\underline{Q}}$ unabhängig.

Beispiel: „gestreckter Quadrupol“



$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y)(\delta(z) - 2\delta(z - a) + \delta(z - 2a)) \quad (6.118)$$

$$\Rightarrow Q = q - 2q + q = 0 \quad (6.119)$$

$$\vec{p} = (q \cdot 0 - 2qa + q \cdot 2a)\vec{e}_z = \vec{0} \quad (6.120)$$

Für die Komponenten des Quadrupoltensors ergibt sich zunächst

$$Q_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r})$$

$$= q \int_{-\infty}^{\infty} dz (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij})|_{x=y=0} (\delta(z) - 2\delta(z - a) + \delta(z - 2a)). \quad (6.121)$$

Daraus folgt

$$Q_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad (6.122)$$

da in diesem Fall sowohl $r_i r_j|_{x=y=0}$ als auch δ_{ij} verschwinden.

Für die Diagonalelemente finden wir

$$Q_{11} = Q_{22} = q \int_{-\infty}^{\infty} dz (-z^2)(\delta(z) - 2\delta(z - a) + \delta(z - 2a)) = -2qa^2 \quad (6.123)$$

und

$$Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22} = 4qa^2, \quad (6.124)$$

wobei wir für Q_{33} die Spurfreiheit ausgenutzt haben.

Insgesamt erhalten wir also

$$\underline{\underline{Q}} = 2qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (6.125)$$

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen, $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|) \equiv \rho(r)$, gilt aus Symmetriegründen $Q_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$. Da aber $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$ gilt, müssen die Diagonalelemente ebenfalls verschwinden:

- Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen gilt $\underline{\underline{Q}} = 0$.

6.7 Randwertprobleme der Elektrostatik

Wie wir in Abschnitt 6.3 besprochen haben, besitzt die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (6.126)$$

die Lösung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.127)$$

falls die Ladungsverteilung im gesamten Raum bekannt ist und keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen.

Oft hat man es aber mit einem *Randwertproblem* zu tun, bei dem ρ nur innerhalb eines (nicht notwendiger Weise endlichen) Raumbereichs \mathcal{V} bekannt ist und bestimmte Vorgaben für ϕ auf dem Rand ∂V gemacht werden. Insbesondere unterscheidet man

i) *Dirichlet-Randbedingungen:*

Der Wert des Potentials $\phi(\vec{r})$ ist auf ∂V vorgegeben.

ii) *Neumann-Randbedingungen:*

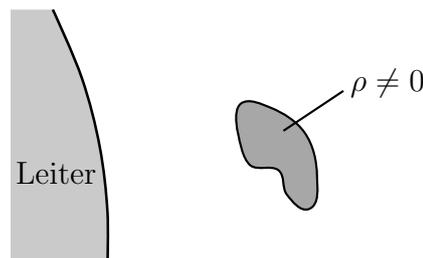
Die Normalableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \equiv \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} = -\vec{E} \cdot \vec{n} \equiv -E^{(n)} \quad (6.128)$$

ist auf ∂V vorgegeben.

Beispiel:

Ladungsverteilung vor einer ideal leitenden Wand.



Im Leiter können sich Ladungen so lange verschieben, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat. Innerhalb des Leiters muss dann gelten:

$$\vec{E}_{innen} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \phi_{innen} = const. \quad (6.129)$$

An der Oberfläche des Leiters können sich dabei Ladungen ansammeln, die zu einer nicht-verschwindenden Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ führen. Wie wir in Abschnitt 6.4 gesehen haben, verhält sich die Tangentialkomponente an der Grenzschicht stetig, während die Normalkomponente um σ/ϵ_0 springt. Unmittelbar am Rand gilt also außerhalb des Leiters

$$\vec{E}_{au\beta en}^{(t)}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad E_{au\beta en}^{(n)}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (6.130)$$

Insbesondere folgt daraus, dass Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters stehen.

Wenn $\sigma(\vec{r})$ bekannt wäre, entspräche die damit verbundene Vorgabe von $\vec{E}_{au\beta en}^{(n)} = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$ einer Neumann-Randbedingung. Im vorliegenden Fall ist $\sigma(\vec{r})$ jedoch nicht a priori bekannt, da sich die Anordnung der frei verschiebbaren Ladungen im Leiter erst aus der Gleichgewichtsbedingung im Zusammenspiel mit den vorgegebenen externen Ladungen ergibt. Dagegen ist

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \quad (6.131)$$

eine stetige Funktion, auch wenn \vec{E} unstetig ist. Auf der Oberfläche des Leiters gilt daher

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{innen} = const. \quad (6.132)$$

Dies entspricht einer Dirichlet-Randbedingung.

6.7.1 Eindeutigkeit der Lösungen

Wir wollen nun zeigen, dass das elektrostatische Randwertproblem unter der Vorgabe von Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen (bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante) eine eindeutige Lösung besitzt. Dazu betrachten wir zunächst zwei skalare Felder $u(\vec{r})$ und $v(\vec{r})$, aus denen wir ein Vektorfeld $\vec{A} = u\vec{\nabla}v$ konstruieren können. Nach dem Gauß'schen Satz gilt dann

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot (u\vec{\nabla}v) \equiv \int_{\partial\mathcal{V}} df \vec{n} \cdot (u\vec{\nabla}v), \quad (6.133)$$

mit der Flächennormalen \vec{n} und dem Flächenelement $d\vec{\sigma} = \vec{n} df$. Mit

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) = (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v) + u \Delta v \quad (6.134)$$

sowie

$$\vec{n} \cdot (u \vec{\nabla} v) = u \vec{n} \cdot \vec{\nabla} v = u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \quad (6.135)$$

folgt daraus

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 r ((\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) + u \Delta v) = \int_{\partial \mathcal{V}} df u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}. \quad (6.136)$$

Diese Relation bezeichnet man auch als die *1. Green'sche Identität*.³⁵

Betrachten wir nun eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im Volumen \mathcal{V} und zwei Lösungen $\phi_1(\vec{r})$ und $\phi_2(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi_i(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}), \quad i = 1, 2, \quad \vec{r} \in \mathcal{V}. \quad (6.138)$$

Für das Feld $\psi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$ gilt dann

$$\Delta \psi(\vec{r}) = 0. \quad (6.139)$$

Mit $u = v = \psi$ folgt dann aus der 1. Green'schen Identität

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 r ((\vec{\nabla} \psi)^2 + \underbrace{\psi \Delta \psi}_{=0}) = \int_{\partial \mathcal{V}} df \psi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}. \quad (6.140)$$

Wenn wir nun zusätzlich fordern, dass auf $\partial \mathcal{V}$

- $\phi_1 = \phi_2$ (Dirichlet) $\Rightarrow \psi = 0$

oder

- $\frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}}$ (Neumann) $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0$

gilt, verschwindet die rechte Seite von Gl. (6.140), d.h. es folgt

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 r (\vec{\nabla} \psi)^2 = 0. \quad (6.141)$$

³⁵ Subtrahiert man davon die analoge Gleichung, die man durch Vertauschen von u und v bekommt, erhält man die *2. Green'sche Identität*:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 r (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial \mathcal{V}} df \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \quad (6.137)$$

Diese spielt beim Lösen des Randwertproblems mittels so genannter Green'scher Funktionen eine wichtige Rolle, worauf wir aber in dieser Vorlesung nicht weiter eingehen werden.

Da $(\vec{\nabla}\psi)^2$ nicht negativ werden kann, muss daher im gesamten Volumen \mathcal{V} gelten:

$$\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) = \text{const.}, \quad (6.142)$$

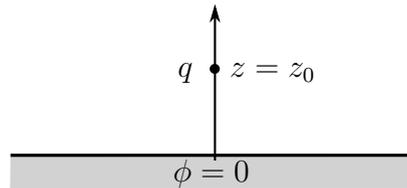
d.h. die Lösung ist bis auf eine physikalisch irrelevante Konstante eindeutig. Bei Dirichlet-Randbedingungen muss die Konstante sogar verschwinden, da hier auf dem Rand $\phi_1 = \phi_2$ gilt.

6.7.2 Spiegelladungsmethode

In manchen Fällen kann das Randwertproblem mit einem geometrischen Verfahren gelöst werden. Die Idee dabei ist, dass man *außerhalb* von \mathcal{V} fiktive Punktladungen („Spiegelladungen“, „Bildladungen“) einführt, die dafür sorgen, dass auf ∂V die Randbedingungen erfüllt sind. *Innerhalb* von \mathcal{V} erhält man damit die richtige Lösung, da diese (ggf. bis auf eine Konstante) eindeutig durch die Ladungsverteilung in \mathcal{V} und die Randbedingungen festgelegt ist.

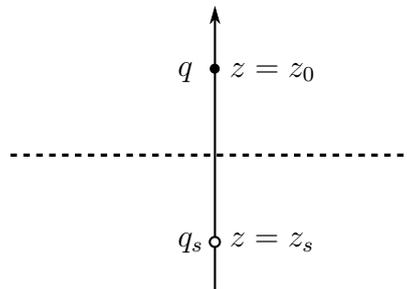
Beispiel:

Punktladung q am Ort $\vec{r}_0 = z_0 \vec{e}_z$, $z_0 > 0$, über einer unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatte mit $\phi = 0$, deren Oberfläche in der x - y -Ebene liegt.



Gesucht ist $\phi(\vec{r})$ im Bereich $z > 0$, das die Poisson-Gleichung mit der Randbedingung $\phi|_{z=0} = 0$ löst.

Dazu ersetzen wir die Metallplatte durch eine fiktive Spiegelladung q_s am Ort $\vec{r}_s = z_s \vec{e}_z$, $z_s < 0$, und versuchen, durch die Wahl von q_s und z_s zu erreichen, dass die Bedingung $\phi|_{z=0} = 0$ auch ohne die Metallplatte erfüllt ist.



Ohne Randbedingungen im Endlichen gilt für das Potenzial der beiden Punktladungen

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{q_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \right) \quad (6.143)$$

und damit

$$\phi(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} + \frac{q_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_s^2}} \right). \quad (6.144)$$

Damit die ursprüngliche Randbedingung erfüllt ist, muss dieser Ausdruck für alle x und y verschwinden. Das ist nur möglich, wenn

$$q_s = -q \quad \text{und} \quad z_s^2 = z_0^2 \quad (6.145)$$

gilt. Aus der zweiten Bedingung folgt $z_s = -z_0$, da z_0 positiv und z_s negativ ist.

Die Lösung lautet also

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_0|} \right) \quad \text{für } z \geq 0. \quad (6.146)$$

In der Tat erfüllt sie sowohl die Randbedingung $\phi|_{z=0} = 0$ als auch – oberhalb der leitenden Platte – die Poisson-Gleichung:

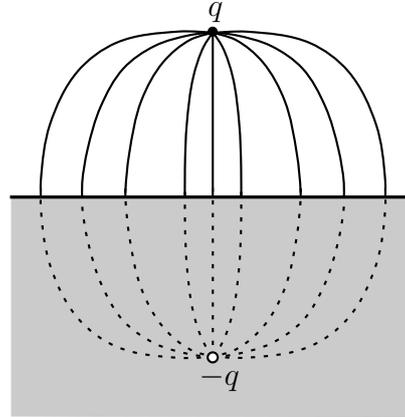
$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + 4\pi \underbrace{\delta(\vec{r} + \vec{r}_0)}_{= 0 \text{ für } z \geq 0} \right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \text{für } z \geq 0. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Wie man dabei sieht, ist entscheidend, dass wir bei unserem Randwertproblem nur an der Lösung innerhalb des Raumbereichs \mathcal{V} , d.h. oberhalb der Metallplatte, interessiert sind. Für negative z -Werte beschreibt Gl. (6.146) dagegen das tatsächliche Potenzial nicht korrekt, das ja in der gesamten Metallplatte konstant verschwinden muss.

Aus dem Potenzial können wir nun auch das elektrische Feld für $z \geq 0$ berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \right) \quad \text{für } z \geq 0. \quad (6.148)$$

Wie nicht anders zu erwarten, entspricht das dem Feld zweier Punktladungen q und $-q$, die symmetrisch zur Metalloberfläche angeordnet sind. Dadurch verlaufen die Feldlinien bei $z = 0$ senkrecht zur Oberfläche, wie es sein muss. In diesem einfachen Fall hätten wir die Anordnung und Stärke der Spiegelladung also auch direkt raten können. Bei komplizierteren Problemen ist das aber nicht unbedingt der Fall (\rightarrow Übung).



Für $z = 0$ gilt $\vec{r} \pm \vec{r}_0 = (x, y, \pm z_0)^T$, d.h. unmittelbar über das Platte ist das elektrische Feld durch

$$\vec{E}_{\text{au\ss}en}(x, y, z = 0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (6.149)$$

gegeben. Da das Feld im Leiter verschwindet, $\vec{E}_{\text{innen}} = \vec{0}$, folgt aus Gl. (6.59) für die Flächenladungsdichte:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \epsilon_0 \left(\vec{E}_{\text{au\ss}en}(x, y, z = 0) - \vec{E}_{\text{innen}}(x, y, 0) \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= -\frac{q}{2\pi} \frac{z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Die induzierte Gesamtladung ist damit

$$\begin{aligned} Q_{\text{ind}} &:= \int_{z=0} df \sigma(x, y) \stackrel{\text{2D Polarkoord.}}{=} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{q}{2\pi}\right) \frac{z_0}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ &= -qz_0 \int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ &= qz_0 \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \\ &= \frac{qz_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \Big|_0^\infty = -q. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Die Spiegelladung $q_s = -q$ entspricht also genau der auf der Oberfläche induzierten Gesamtladung.

Kapitel 7

Magnetostatik

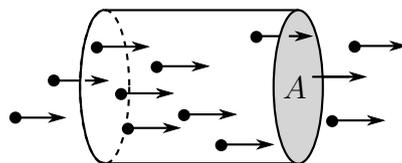
Nachdem wir uns im vorigen Kapitel auf zeitunabhängige Ladungen beschränkt haben, wenden wir uns nun bewegten Ladungen, also elektrischen Strömen zu. In der Magnetostatik nehmen wir jedoch an, dass die Ströme selbst wiederum zeitunabhängig sind und untersuchen die damit verbundenen magnetischen Kräfte. Wie wir sehen werden, ergeben sich dabei gewisse Analogien zur Elektrostatik, aber auch wichtige Unterschiede.

7.1 Grundlagen

7.1.1 Elektrische Ströme

Ein metallischer Leiter besteht mikroskopisch aus weitgehend ortsfesten positiv geladenen Ionenrümpfen und einem relativ frei beweglichen „Gas“ aus Elektronen. Legt man ein äußeres elektrisches Feld an, werden die Elektronen zunächst entgegen (negative Ladung!) der Feldrichtung beschleunigt. Auf Grund von Stößen, die wie eine Reibungskraft wirken, bildet sich aber schließlich eine mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$ aus, die proportional zum angelegten \vec{E} -Feld ist.

Betrachten wir dazu einen Leiter, in dem sich Ladungsträger mit Ladung q , Teilchendichte (= Teilchen pro Volumen) n und mittlerer Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$ durch eine Fläche A bewegen, die senkrecht auf $\langle \vec{v} \rangle$ steht.



Die *Stromstärke* I ist die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließende Ladung:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad \text{Einheit: } [I] = 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}. \quad (7.1)$$

Im obigen Beispiel laufen pro Zeiteinheit Δt

$$\Delta N = n A |\langle \vec{v} \rangle| \Delta t \quad (7.2)$$

Teilchen durch die Fläche A , d.h.

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q \Delta N}{\Delta t} = q n A |\langle \vec{v} \rangle| \equiv \rho_{\text{frei}} A |\langle \vec{v} \rangle| \quad (7.3)$$

mit der Ladungsdichte der beweglichen Ladungen³⁶

$$\rho_{\text{frei}} = qn. \quad (7.4)$$

Die Stromdichte \vec{j} ist die pro Zeit und Fläche durch ein Flächenelement senkrecht zur Bewegungsrichtung fließende Ladung multipliziert mit dem Einheitsvektor in Bewegungsrichtung³⁷

$$\vec{j} = \frac{dQ}{dA dt} \vec{n} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|}, \quad dA \perp \vec{n}. \quad (7.5)$$

Die Stromstärke erhält man dann durch Integration der Stromdichte über die Fläche:

$$I = \int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}. \quad (7.6)$$

Für unser Beispiel ergibt sich für die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{I}{A} \frac{\langle \vec{v} \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} = qn \langle \vec{v} \rangle = \rho_{\text{frei}} \langle \vec{v} \rangle. \quad (7.7)$$

Im Allgemeinen können ρ_{frei} und $\langle \vec{v} \rangle$ und damit auch \vec{j} sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}, t) \langle \vec{v} \rangle(\vec{r}, t). \quad (7.8)$$

³⁶Die Gesamtladung des Leiters und die zugehörige räumlich gemittelte Ladungsdichte $\langle \rho_{\text{ges}} \rangle = \langle \rho_{\text{frei}} \rangle + \langle \rho_{\text{Ionen}} \rangle$ sind dagegen in der Regel gleich null.

³⁷Eine verwandte Größe ist die beim Streuprozess in Abschnitt 2.5 eingeführte Teilchenstromdichte. Diese ist eigentlich auch ein Vektor. Für die Definition des Wirkungsquerschnitts wurde jedoch nur der Betrag benötigt.

Die Mittelung der Geschwindigkeit \vec{v} muss dann über ein Volumen durchgeführt werden, das viel kleiner ist als die interessierende makroskopische Längenskala. Im Extremfall können wir auch einzelne Punktladungen betrachten:

$$\vec{j}_{Punkt}(\vec{r}, t) = \rho_{Punkt}(\vec{r}, t) \vec{v}_{Punkt}(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_{Punkt}(t)) \dot{\vec{r}}_{Punkt}(t). \quad (7.9)$$

In der Magnetostatik hängt \vec{j} jedoch definitionsgemäß nicht von der Zeit ab. Wir müssen daher dann davon ausgehen, dass ρ_{frei} zumindest in Bewegungsrichtung kontinuierlich ist. Als Analogon zur Punktladung führt man dann manchmal so genannte *Stromfäden* ein, in denen ein endlicher Strom entlang einer Linie mit infinitesimalem Querschnitt fließt.

7.1.2 Ladungserhaltung

Ladungsdichte und Stromdichte sind nicht vollkommen unabhängig, sondern erfüllen die *Kontinuitätsgleichung*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.} \quad (7.10)$$

Dies ist eine Konsequenz der Ladungserhaltung, wie man erkennt, wenn man die Gleichung über ein Volumen \mathcal{V} integriert:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{(7.10)}{=} - \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial \mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}, \quad (7.11)$$

d.h. die Abnahme der Ladung in \mathcal{V} pro Zeit ist gleich dem durch die Oberfläche aus dem Volumen herausfließenden Strom.

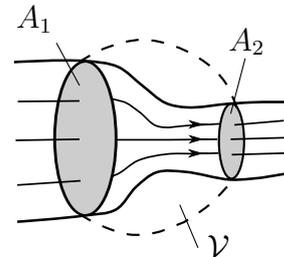
In der Magnetostatik betrachtet man sinnvoller Weise nur den Fall, in dem neben den Strömen auch die Ladungsdichten zeitlich konstant sind, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (7.12)$$

Das hat einige wichtige Konsequenzen:

- Leiter mit nicht-konstantem Querschnitt

Seien A_1 und A_2 zwei beliebige Querschnittsflächen eines Leiters und \mathcal{V} ein Volumen, dessen Oberfläche A_1 und A_2 enthält.



Es gilt dann

$$0 = \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = \int_{A_1} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} + \int_{A_2} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = -I_1 + I_2. \quad (7.13)$$

Dabei haben wir angenommen dass der Strom so gerichtet ist, dass er bei A_1 in das Volumen hinein- und bei A_2 herausfließt. Da das Flächenelement nach außen gerichtet ist, ergibt sich dann ein Minuszeichen für das erste Integral.

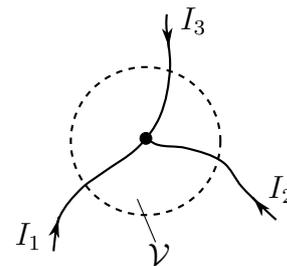
Insgesamt erhalten wir also

$$I_1 = I_2. \quad (7.14)$$

Da die Wahl von A_1 und A_2 beliebig ist, bedeutet das, dass die Stromstärke entlang des gesamten Leiters gleich ist.

- Kirchhoff'sche Knotenregel

Betrachten wir nun drei Leiter, die an einem „Knoten“ mit einander verbunden sind, und ein Volumen \mathcal{V} , das den Knoten einschließt. Wenn wir die Stromrichtung so definieren, dass alle Ströme in den Knoten hineinfließen, folgt



$$0 = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = -I_1 - I_2 - I_3 \quad (7.15)$$

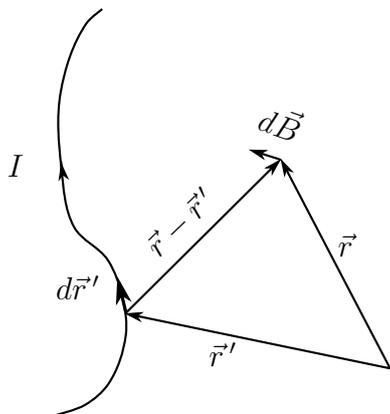
oder allgemein für n Leiter

$$\sum_{i=1}^n I_n = 0. \quad (7.16)$$

7.2 Magnetische Induktion

In der Elektrostatik haben wir gesehen, dass Ladungen elektrische Felder erzeugen, die sich durch ihre Kraftwirkungen auf andere Ladungen bemerkbar machen. Analog dazu wollen wir nun die von zeitunabhängigen Strömen hervorgerufenen magnetischen Felder und deren Kraftwirkung auf andere Ströme untersuchen.

Ausgangspunkt ist das *Biot-Savart'sche Gesetz*:



Dazu betrachten wir einen Stromfaden mit Stromstärke I . Ein infinitesimales Stück $d\vec{r}'$ des Stromfadens bei \vec{r}' erzeugt dann am Ort \vec{r} ein infinitesimales Feld

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7.17)$$

Dabei ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \quad (7.18)$$

die *magnetische Feldkonstante*.

Das \vec{B} -Feld nennt man *magnetische Induktion*. Im Vakuum unterscheidet es sich vom *Magnetfeld* \vec{H} , das wir in Abschnitt 8.2 einführen werden, nur um einen konstanten Faktor, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Es wird daher häufig – wenn auch nicht ganz korrekt – ebenfalls als Magnetfeld bezeichnet.

Abgesehen vom Vektorprodukt erinnert Gl. (7.17) an den Ausdruck für das von einer Punktladung nach dem Coulomb-Gesetz erzeugte elektrische Feld, wenn wir die Ersetzungen

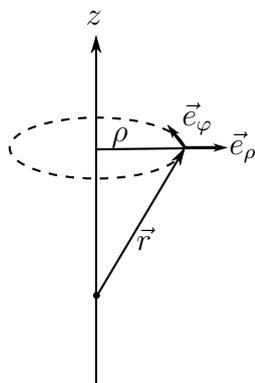
$$\vec{E} \leftrightarrow d\vec{B}, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0, \quad q \leftrightarrow I d\vec{r}' \quad (7.19)$$

vornehmen. Im Gegensatz zur Ladung q ist das „Stromelement“ $I d\vec{r}'$ jedoch ein rein theoretisches Konstrukt und existiert nur als Teil einer geschlossenen Leiterschleife. Für konkrete Anwendungen des Biot-Savart'schen Gesetzes muss man daher die infinitesimalen Teilstücke aufintegrieren:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_c d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7.20)$$

Beispiel: unendlich langer Leiter

Wir verwenden Zylinderkoordinaten mit dem Leiter entlang der z -Achse.³⁸



$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z,$$

$$\vec{r}' = z' \vec{e}_z, \quad d\vec{r}' = dz' \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z,$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho dz' \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \rho dz' \vec{e}_\varphi$$

Wir erhalten also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \vec{e}_\varphi. \quad (7.21)$$

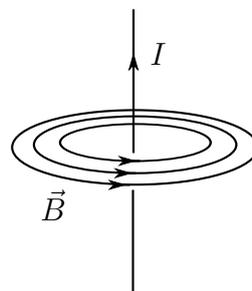
Mit der Substitution

$$x := \frac{z' - z}{\rho} \quad \Rightarrow \quad dz' = \rho dx, \quad (\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2} = \rho^3 (1 + x^2)^{3/2}$$

ergibt sich daraus

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \underbrace{\frac{2}{\rho} \int_0^\infty dx \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=1} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi. \quad (7.22)$$

Das \vec{B} -Feld verhält sich also proportional zu I , fällt reziprok zum Abstand vom Leiter ab, und die Feldlinien bilden konzentrische Kreise (perfektes Wirbelfeld).



³⁸ Da die Ladungsdichte hier keine Rolle spielt, bezeichnen wir den Abstand von der z -Achse wie üblich mit der Zylinderkoordinate ρ .

Wir können auch die Idealisierung des unendlich dünnen Stromfadens fallen lassen, indem wir die Stromdichte verwenden:

$$I d\vec{r}' = \vec{j}(\vec{r}') dA dr' = \vec{j}(\vec{r}') d^3r'. \quad (7.23)$$

Das Biot-Savart'sche Gesetz erhält dann die allgemeine Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7.24)$$

Auch hier sehen wir wieder die Analogie zur Elektrostatik mit den Ersetzungen

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0, \quad \rho(\vec{r}') \leftrightarrow \vec{j}(\vec{r}') \times . \quad (7.25)$$

Eine weitere Analogie besteht darin, dass \vec{B} -Felder Kräfte auf Ströme ausüben, ähnlich wie \vec{E} -Felder Kräfte auf Ladungen ausüben. Quantitativ beschrieben wird dies durch das *Ampère'sche Kraftgesetz*:

Ein statisches \vec{B} -Feld übt auf ein infinitesimales Stück $I d\vec{r}$ eines Stromfadens am Ort \vec{r} die Kraft

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (7.26)$$

aus.

Für ein endliches Stück des Stromfadens ergibt sich daraus durch Integration

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{C}} I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (7.27)$$

was wir mit Hilfe der Stromdichte auf die Kraft auf eine allmemeine Stromverteilung verallgemeinern können:

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (7.28)$$

Dabei ist $\vec{B}(\vec{r})$ ein von einer *anderen* Stromverteilung erzeugtes Feld. Setzt man die Stromdichte einer Punktladung ein,

$$\vec{j}_P(\vec{r}) = q \vec{v}_P \delta(\vec{r} - \vec{r}_P), \quad (7.29)$$

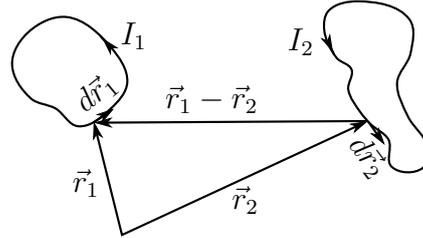
ergibt sich die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q \vec{v}_P \times \vec{B}(\vec{r}_P). \quad (7.30)$$

Da \vec{j}_P keine statische Ladungsverteilung ist, stellt sich hier die Frage, ob wir die Kraft überhaupt auf diese Weise berechnen durften. Das richtige Resultat gibt uns aber letztlich recht. In der Tat ist das Ampère'sche Kraftgesetz auch für zeitabhängige Ströme gültig. Das Biot-Savart-Gesetz zur Berechnung von \vec{B} gilt dagegen nur im zeitunabhängigen Fall.

Beispiel:

zwei Stromschleifen, die von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen werden



Das Stromelement $I_2 d\vec{r}_2$ erzeugt am Ort \vec{r}_1 nach dem Biot-Savart'schen Gesetz das Feld

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (7.31)$$

Nach dem Ampère'schen Kraftgesetz übt $d\vec{B}_2$ auf das Leiterelement $I_1 d\vec{r}_1$ die Kraft

$$d\vec{F}^{(12)} = I_1 d\vec{r}_1 \times d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{r}_1 \times \left(d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (7.32)$$

aus. Die Kraft, die die zweite auf die erste Leiterschleife ausübt, ist also

$$\vec{F}^{(12)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}_1 \times \left(\oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right). \quad (7.33)$$

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ folgt

$$d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) = d\vec{r}_2 (d\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) - (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (7.34)$$

Der ersten Term führt auf das Integral

$$\oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}_1 \cdot \left(-\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) = 0, \quad (7.35)$$

da geschlossene Wegintegrale über Gradientenfelder immer verschwinden (vgl. konservative Kraftfelder). Es trägt also nur der zweite Term bei, und wir erhalten

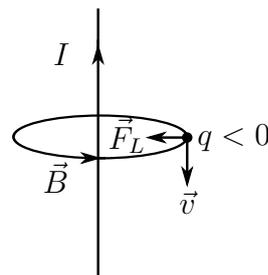
$$\vec{F}^{(12)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}_1 \cdot \oint_{\mathcal{C}_2} d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (7.36)$$

Vertauschen von 1 und 2 liefert

$$\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}^{(12)}, \quad (7.37)$$

d.h. das dritte Newton'sche Gesetz ist erfüllt. Gl. (7.36) ist das eigentliche Ampère'sche Kraftgesetz und kann als magnetostatisches Analogon zum Coulomb-Gesetz angesehen werden.

Die Analogien zwischen Elektro- und Magnetostatik haben einen tieferen Grund. Betrachten wir dazu einen langen geraden Leiter, durch den ein Strom in positive z -Richtung fließt. Zum Zeitpunkt t bewege sich eine negative Ladung q mit Geschwindigkeit \vec{v} parallel zum Leiter in negative z -Richtung. Damit wirkt auf die Ladung eine Lorentz-Kraft



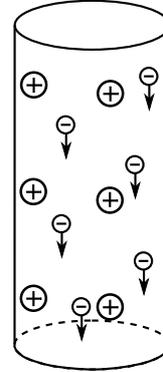
$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (7.38)$$

die sie in Richtung Leiter zieht. Wir nehmen außerdem an, dass der Leiter elektrisch neutral ist, d.h. $\rho_{ges} = \rho_{frei} + \rho_{Ionen} = 0$, so dass keine elektrischen Kräfte wirken.

Wir betrachten nun die gleiche Situation aus der Perspektive eines Beobachters, der sich mit der mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} parallel zum Leiter bewegt, so dass die Ladung zum Zeitpunkt t aus seiner Sicht ruht. Da die Geschwindigkeit des Beobachters konstant ist, sind beide Koordinatensysteme, das Ruhesystem des Leiters und das mit der Ladung mitbewegte System, gleichwertige Inertialsysteme. Also muss die Ladung auch im mitbewegten System eine Kraft in Richtung Leiter erfahren.³⁹ Allerdings kann es sich nicht um die Lorentz-Kraft handeln, da die Ladung im mitbewegten System ruht. Wie erklärt sich dann der mitbewegte Beobachter die Kraft?

³⁹ Die Kraft macht sich in beiden Systemen dadurch bemerkbar, dass die Ladung in Richtung des Leiters beschleunigt wird. Da wir annehmen, dass sich der „mitbewegte“ Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, stimmt seine Geschwindigkeit also nur zum Zeitpunkt t mit der Geschwindigkeit Ladung überein. Das ist aber für unsere Überlegungen ausreichend.

Sehen wir uns dazu noch einmal das mikroskopische Bild des Leiters an. Im Ruhesystem des Leiters besteht er aus ruhenden Ionen und aus Elektronen, die sich nach „unten“ bewegen. Die Ladungsdichten berechnen sich aus den jeweiligen Teilchendichten und -ladungen,



$$\rho_{Ionen} = n_{Ionen} q_{Ionen} > 0, \quad \rho_{frei} = n_{frei} q_{frei} < 0, \quad \rho_{Ionen} + \rho_{frei} = 0. \quad (7.39)$$

Für den Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} nach unten bewegt, bewegen sich die Ionen dagegen mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}$ nach oben. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie verkürzt sich dadurch ihr Abstand („Lorentz-Kontraktion“), d.h. ihre Dichte ist größer als im Ruhesystem des Leiters:

$$n'_{Ionen} > n_{Ionen} \quad \Rightarrow \quad \rho'_{Ionen} > \rho_{Ionen}. \quad (7.40)$$

Dabei beziehen sich die gestrichelten Größen auf das mitbewegte System. Umgekehrt bewegen sich die freien Ladungen für den mitbewegten Beobachter langsamer,⁴⁰ so dass ihre Abstände größer (weniger Lorentz-kontrahiert) sind als im Ruhesystem des Leiters:

$$n'_{frei} < n_{frei} \quad \Rightarrow \quad |\rho'_{frei}| < |\rho_{frei}|. \quad (7.41)$$

Der mitbewegte Beobachter sieht also eine größere positive Ladungsdichte durch die Ionen und eine betragsmäßig geringere Ladungsdichte der freien Elektronen. Damit ist die Ladungsdichte insgesamt positiv,

$$\rho'_{ges} = \rho'_{frei} + \rho'_{Ionen} > 0, \quad (7.42)$$

d.h. im mitbewegten System ist der Leiter positiv geladen! Er besitzt daher ein elektrisches Feld, das die negative Ladung anzieht.

Im mitbewegten System wirkt also eine elektrische Kraft auf die Ladung, während im Ruhesystem des Leiters eine magnetische Kraft wirkt. Dies zeigt,

⁴⁰ Das gilt, solange die Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ des Beobachters kleiner ist als das Doppelte der Geschwindigkeit der freien Ladungen, was wir hier der Einfachheit halber annehmen. Andernfalls werden die Abstände der freien Ladungen ebenfalls Lorentz-kontrahiert, aber weniger als die Abstände der Ionen. Qualitativ ändert das nichts am Gesamtergebnis.

dass elektrische und magnetische Kräfte eng miteinander verwandt sind. In der Tat bilden in einer relativistischen Beschreibung die Komponenten des \vec{E} - und des \vec{B} -Feldes gemeinsam den *elektromagnetischen Feldstärketensor*, eine 4×4 -Matrix, die sich unter Lorentz-Transformationen als Tensor 2. Stufe transformiert.

7.3 Grundgleichungen der Magnetostatik

7.3.1 Das Vektorpotenzial

Ausgehend von der allgemeinen Form Gl. (7.24) des Biot-Savart'schen Gesetzes,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (7.43)$$

und

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.44)$$

erhalten wir für das \vec{B} -Feld

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (7.45)$$

und damit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (7.46)$$

mit dem *Vektorpotenzial*

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.47)$$

Auch hier sieht man wieder Analogien zum skalaren Potenzial der Elektrostatik:

$$\phi \leftrightarrow \vec{A}, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0, \quad \rho \leftrightarrow \vec{j}. \quad (7.48)$$

7.3.2 Eichung

In der Elektrostatik haben wir gesehen, dass Potenziale ϕ , die sich nur um eine Konstante unterscheiden, die gleiche Physik beschreiben, da das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}(\phi + \text{const.}) \quad (7.49)$$

das gleiche ist.

Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi(\vec{r})) = \vec{0} \quad \text{für beliebige } \psi(\vec{r}), \quad (7.50)$$

finden wir analog in der Magnetostatik, dass Vektorpotenziale, die sich um ein Gradientenfeld unterscheiden, das gleiche \vec{B} -Feld liefern:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\psi). \quad (7.51)$$

Die Ersetzung

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \quad (7.52)$$

bezeichnet man als *Eichtransformation*.

Der allgemeine Ausdruck für \vec{A} ist also

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \quad (7.53)$$

mit einem beliebigen Feld $\psi(\vec{r})$. Daraus ergibt sich für die Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Delta\psi(\vec{r}). \quad (7.54)$$

Da wir $\Delta\psi$ durch entsprechende Wahl von ψ beliebig vorgeben können, kann diese „Eichfreiheit“ dazu verwendet werden, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ jede beliebige Form zu geben. Z.B. können wir fordern, dass die Divergenz überall verschwindet,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für alle } \vec{r}, \quad (7.55)$$

was oft vorteilhaft ist. Diese Bedingung bezeichnet man als *Coulomb-Eichung*.

In diesem Zusammenhang sehen wir uns den ersten Term auf der rechten Seite von Gl. (7.54) noch einmal etwas genauer an:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \text{Oberflächenterme,} \end{aligned} \quad (7.56)$$

wobei wir im letzten Schritt partiell integriert haben. Die Oberflächenterme sind von der Form $\sim \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ und verschwinden, wenn \mathcal{V} so gewählt wird, dass keine Ströme durch die Oberfläche hindurchfließen oder wenn \mathcal{V} der gesamte unendliche Raum ist. Außerdem gilt, wie wir gesehen haben, in der Magnetostatik auf Grund der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Damit ist der gesamte Ausdruck gleich null, d.h. in der Magnetostatik im unendlichen Volumen ist die Coulomb-Eichung schon für $\psi = 0$ realisiert.

7.3.3 Maxwell-Gleichungen

Mit Hilfe von Gl. (7.46) wollen wir nun Divergenz und Rotation des \vec{B} -Feldes berechnen.

1. Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (7.57)$$

da $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ für beliebige Vektorfelder $\vec{V}(\vec{r})$.

Es folgt dann für den magnetischen Fluss durch eine geschlossene Oberfläche

$$\Phi_M \equiv \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (7.58)$$

Da das analoge Integral über das elektrische Feld proportional zur in \mathcal{V} enthaltenen Gesamtladung ist (physikalischer Gauß'scher Satz), bedeutet das: *Es gibt keine magnetischen Ladungen!*

2. Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (7.59)$$

In der Coulomb-Eichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, verschwindet der erste Term, d.h. wir finden

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A} \quad (\text{in Coulomb-Eichung}). \quad (7.60)$$

Wie wir gesehen haben, ist in der Magnetostatik im unendlichen Raum die Coulomb-Eichung schon für $\psi = 0$ realisiert, d.h. wir können Gl. (7.47) für das Vektorpotenzial verwenden. Das liefert

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\stackrel{(6.40)}{=} -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} , \quad (7.61)$$

d.h. wir erhalten

$$\boxed{\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}).} \quad (7.62)$$

Diese Gleichung wird manchmal *Grundgleichung der Magnetostatik* genannt und ist das Analogon zur Poisson-Gleichung.

Für die Rotation des \vec{B} -Feldes finden wir also

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (7.63)$$

Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes ergibt sich daraus das *Ampère'sche Durchflutungsgesetz*:

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_S d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})) = \mu_0 \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \mu_0 I. \quad (7.64)$$

Entsprechend wird Gl. (7.63) auch oft als *Ampère'sches Gesetz* bezeichnet.

Insgesamt haben wir damit die die folgenden

Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik im Vakuum:

differenzielle Form:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \end{array}} \quad (7.65)$$

integrale Form:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q, & \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = 0, \\ \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0, & \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 I. \end{array}} \quad (7.66)$$

7.4 Multipolentwicklung lokalisierter Stromverteilungen

Analog zur Multipolentwicklung in der Elektrostatik wollen wir nun das Vektorpotenzial einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$, die auf ein endliches Volumen \mathcal{V} beschränkt ist,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7.67)$$

für große Entfernungen $|\vec{r}| \gg R > |\vec{r}'|$ näherungsweise berechnen. Mit Gl. (6.98),

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (7.68)$$

erhält man

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{r^3} \int_{\mathcal{V}} d^3r' (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}') + \dots \right), \quad (7.69)$$

d.h. komponentenweise

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} d^3r' j_i(\vec{r}') + \sum_j \frac{r_j}{r^3} \int_{\mathcal{V}} d^3r' r'_j j_i(\vec{r}') + \dots \right). \quad (7.70)$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite sind dabei – analog zur Elektrostatik – der Monopol- und der Dipolbeitrag zum Vektorpotenzial.

Betrachten wir zunächst den Monopolbeitrag. Mit

$$\vec{\nabla} = \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial r_j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} r_i = \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \sum_j \vec{e}_j \delta_{ij} = \vec{e}_i \quad (7.71)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d^3r j_i(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_i \\ &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} r_i \\ &= - \int_{\mathcal{V}} d^3r r_i \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})}_{=0} = 0. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Im vorletzten Schritt haben wir partiell integriert und dabei vorausgesetzt, dass die Stromverteilung vollständig innerhalb von \mathcal{V} liegt, so dass die Oberflächenterme verschwinden.

Im Einklang mit unserer früheren Feststellung, dass es keine magnetischen Ladungen gibt, finden wir also: *Es gibt keine magnetischen Monopole!*

Der Dipolterm kann analog umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} d^3r r_j j_i &= \int_{\mathcal{V}} d^3r r_j \vec{j} \cdot \vec{\nabla} r_i \\
&= - \int_{\mathcal{V}} d^3r r_i \vec{\nabla} \cdot (r_j \vec{j}) \\
&= - \int_{\mathcal{V}} d^3r r_i (\vec{j} \cdot \vec{\nabla} r_j + r_j \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{=0}) \\
&= - \int_{\mathcal{V}} d^3r r_i j_j \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r (r_i j_j - r_j j_i), \tag{7.73}
\end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$A_i(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_j r_j \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r' (r'_i j_j - r'_j j_i) \tag{7.74}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &\approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r' (\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{j}) - \vec{j} (\vec{r}' \cdot \vec{r}')) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{r}' \times (\vec{r}' \times \vec{j}). \tag{7.75}
\end{aligned}$$

Wir finden also

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{7.76}$$

mit dem *magnetischen Moment*

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'). \tag{7.77}$$

Für das \vec{B} -Feld ergibt sich daraus

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right). \quad (7.78)$$

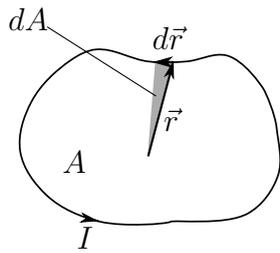
Dies hat die gleiche Form wie das elektrische Dipolfeld Gl. (6.108) mit den Ersetzungen

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}, \quad \frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0, \quad \vec{p} \leftrightarrow \vec{m}. \quad (7.79)$$

Wie im elektrischen Fall werden höhere Multipolmomente mit wachsendem Abstand immer unwichtiger. Da es aber keine magnetischen Ladungen gibt, verhält sich das Feld einer Stromverteilung in großer Entfernung i.A. wie ein Dipol. Insbesondere fällt \vec{B} in großer Entfernung mindestens mit $\frac{1}{r^3}$ ab.

Beispiel: Magnetisches Moment eines geschlossenen ebenen Stromkreises

Mit $\vec{j}(\vec{r}) d^3r = I d\vec{r}$ für den Stromfaden ergibt sich



$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int_V d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \\ &= I \oint_{\partial A} \underbrace{\frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}}_{dA \vec{n}} = IA \vec{n}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

d.h. \vec{m} steht senkrecht auf der von der Leiterschleife eingeschlossenen Fläche und sein Betrag ist das Produkt aus der Stromstärke I und dem Flächeninhalt A .

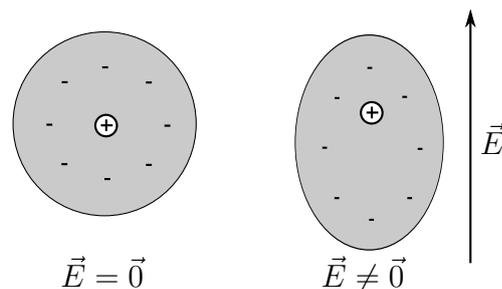
Kapitel 8

Elektro- und Magnetostatik in Materie

Bei den Überlegungen, die zu den statischen Maxwell-Gleichungen (7.65) geführt haben, sind wir davon ausgegangen, dass sich die mit ρ und \vec{j} verbundenen Ladungen und Ströme im Vakuum befinden. Oft interessiert man sich aber auch für die elektrischen und magnetischen Felder in Anwesenheit von nichtleitenden Medien. Diese bestehen aus Atomen oder Molekülen, die zwar in der Regel insgesamt neutral, jedoch aus geladenen Teilchen (Elektronen und Atomkernen) aufgebaut sind. Sie können daher auf äußere Felder reagieren und dadurch die Felder ihrerseits beeinflussen.

Beispiel: Atom im äußeren elektrischen Feld

Durch Anlegen des Feldes verschiebt sich die Elektronenhülle relativ zum Kern. Dadurch entsteht ein Dipolmoment.



Wenn wir von Quanteneffekten absehen, haben die Vakuum-Maxwell-Gleichungen auf *mikroskopischer* Ebene weiterhin Gültigkeit. Zur Berechnung der Felder müssten wir jedoch die Ladungs- und Stromverteilungen für jedes einzelne Atom kennen, was weder möglich noch sinnvoll ist. Statt dessen wollen wir eine *makroskopische* Beschreibung entwickeln, bei der Ladungs- und Stromdichten sowie die damit verbundenen Felder über aus mikroskopischer Sicht große, jedoch aus makroskopischer Sicht kleine Volumina gemittelt wer-

den. Wenn wir z.B. über ein Volumen von $1 \mu\text{m}^3$ mitteln, enthält dieses, wenn wir von einer typischen Teilchendichte von $\sim 10^{23}$ Atomen pro Kubikzentimeter ausgehen, etwa 10^{11} Atome, ist also aus mikroskopischer Sicht groß. Zur Durchführung der Mittelung definieren wir

$$\bar{f}(\vec{r}) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3r' f(\vec{r} + \vec{r}'), \quad (8.1)$$

wobei $f(\vec{r})$ eine beliebige Funktion und \mathcal{V}_0 eine kleine Kugel mit Volumen V und Mittelpunkt $\vec{r}' = \vec{0}$ ist. Diese Vorschrift hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \bar{f}(\vec{r}) &= \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3r' \frac{\partial}{\partial r_i} f(\vec{r} + \vec{r}') \\ &= \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3r' \left(\frac{\partial}{\partial s_i} f(\vec{s}) \right) \Big|_{\vec{s}=\vec{r}+\vec{r}'} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial r_i} \right)}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (8.2)$$

d.h. die Ableitung der gemittelten Funktion ist gleich der gemittelten Ableitung der Funktion. Es gilt also

$$\vec{\nabla} \bar{f} = \overline{(\vec{\nabla} f)} \quad (8.3)$$

und entsprechend für die Divergenz und die Rotation von Vektorfeldern.

8.1 Elektrostatik der Dielektrika

Wir betrachten nun ein System aus frei beweglichen Ladungen in einem neutralen Medium, z.B. einem Gas aus neutralen Molekülen. Es seien

- $\rho_m(\vec{r})$ die mikroskopische Ladungsdichte,
- $\vec{E}_m(\vec{r})$ das mikroskopische elektrische Feld,
- $\phi_m(\vec{r})$ das mikroskopische elektrostatische Potenzial.

Auf mikroskopischer Ebene gilt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_m, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_m = \vec{0}, \quad \vec{E}_m = -\vec{\nabla} \phi_m. \quad (8.4)$$

Um ϕ_m zu berechnen, betrachten wir zunächst die freien Ladungen:

$$\phi_{m, \text{frei}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_{\text{frei}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8.5)$$

Hinzu kommt der Beitrag der Moleküle. Diese sind zwar insgesamt neutral, können aber durch das elektrische Feld *polarisiert* werden, d.h. tragen ein Dipolmoment. Der entsprechende Beitrag eines Moleküls am Ort \vec{R}_j mit Dipolmoment \vec{p}_j zum Potenzial ist dann durch

$$\begin{aligned}\phi_{m,j}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{R}_j)}{|\vec{r} - \vec{R}_j|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \vec{p}_j \delta(\vec{r}' - \vec{R}_j) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}\quad (8.6)$$

gegeben. Die Beiträge höherer Multipolmomente können wir hier vernachlässigen, da sie auf den Skalen $r \gg R_{\text{Molekül}}$, über die wir später mitteln wollen, verschwindend klein sind. Nach Summation über alle Moleküle und der Definition der *mikroskopischen Polarisation*,⁴¹

$$\vec{P}_m(\vec{r}) := \sum_{j=1}^N \vec{p}_j \delta(\vec{r} - \vec{R}_j), \quad (8.7)$$

ergibt sich dann insgesamt für das mikroskopische Potenzial:

$$\begin{aligned}\phi_m(\vec{r}) &= \phi_{m,\text{frei}}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N \phi_{m,j}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left(\frac{\rho_{\text{frei}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).\end{aligned}\quad (8.8)$$

Auf makroskopischer Ebene definieren wir nun

$$\vec{E} := \overline{\vec{E}_m} \quad \text{und} \quad \phi := \overline{\phi_m}. \quad (8.9)$$

Es gilt dann

$$\vec{E} = \overline{(-\vec{\nabla}\phi_m)} = -\vec{\nabla}\overline{\phi_m} = -\vec{\nabla}\phi \quad (8.10)$$

wie bisher.

⁴¹ Wie man anhand der Definition sieht, entspricht die mikroskopische Polarisation einer Dipolmomentdichte.

Für das Potenzial ergibt sich durch Mittelung von Gl. (8.8)

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3R \int d^3r' \left(\frac{\rho_{frei}(\vec{r}')}{|\vec{r} + \vec{R} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}') \cdot (\vec{r} + \vec{R} - \vec{r}')}{|\vec{r} + \vec{R} - \vec{r}'|^3} \right) \\
&\stackrel{\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{R}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3R \int d^3r'' \left(\frac{\rho_{frei}(\vec{r}'' + \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \frac{\vec{P}_m(\vec{r}'' + \vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r'' \left(\frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'') \cdot (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right) \tag{8.11}
\end{aligned}$$

mit der makroskopischen Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) := \bar{\rho}_{frei}(\vec{r}) \tag{8.12}$$

und der *Polarisation*⁴²

$$\vec{P}(\vec{r}) := \overline{\vec{P}_m}(\vec{r}). \tag{8.13}$$

Weitere Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{8.14}
\end{aligned}$$

wobei wir die Integrationsvariable wieder \vec{r}' genannt und im zweiten Schritt partiell integriert haben.

Das Ergebnis sieht aus wie das Potenzial einer Ladungsdichte $\rho + \rho_P$ mit der *Polarisationsladungsdichte*

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}). \tag{8.15}$$

Entsprechend gilt analog zum Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \tag{8.16}$$

⁴² Es gilt also

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_0} d^3r' \sum_j \vec{p}_j \delta(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{R}_j) = \frac{1}{V} \sum_{(\vec{R}_j - \vec{r}) \in \mathcal{V}_0} \vec{p}_j,$$

d.h. $\vec{P}(\vec{r})$ ist die über das Volumen \mathcal{V}_0 gemittelte Dichte der elektrischen Dipolmomente in der Umgebung von \vec{r} .

und folglich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (8.17)$$

mit der *dielektrischen Verschiebung*

$$\vec{D}(\vec{r}) := \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \quad (8.18)$$

Für die Rotation ergibt sich durch Mittelung von $\vec{\nabla} \times \vec{E}_m = \vec{0}$ wie im Vakuum

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (8.19)$$

Verhalten an Grenzflächen:

Analog zu Abschnitt 6.4 folgt aus Gl. (8.17), dass die Normalkomponente von \vec{D} an der Grenzfläche unstetig ist,

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma, \quad (8.20)$$

wobei σ die von den *freien* Ladungen an der Grenzfläche gebildete gemittelte Flächenladungsdichte ist.

Mit Gl. (8.19) folgt unverändert, dass die Tangentialkomponente von \vec{E} an der Grenzfläche stetig ist,

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0, \quad (8.21)$$

vgl. Gl. (6.61). Dies gilt i.A. nicht für die Tangentialkomponente von \vec{D} , da die Tangentialkomponente der Polarisation \vec{P} an der Grenzfläche unstetig sein kann.

Einteilung elektrostatischer Materialien:

i) (eigentliche) Dielektrika

Lokale elektrische Dipole, die ohne äußeres elektrisches Feld nicht existieren, werden vom Feld durch Deformationspolarisation gebildet (vgl. Bild am Anfang des Kapitels).

ii) Paraelektrika

Permanente elektrische Dipole (z.B. H_2O -Moleküle), die ohne äußeres elektrisches Feld statistisch verteilt sind und sich daher im Mittel gegenseitig aufheben, richten sich im Feld aus, so dass insgesamt eine nichtverschwindende Polarisation entsteht.

iii) Ferroelektrika

Stoffe mit permanenten elektrische Dipolen, die sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_c auch ohne äußeres elektrisches Feld spontan ausrichten.

Der Begriff „Dielektrika“ wird allerdings auch als Oberbegriff für alle elektrisch nichtleitenden polarisierbaren Medien verwendet, insbesondere also auch für Paraelektrika.

Allgemein ist die Polarisation also eine Funktion des elektrischen Feldes, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, mit

$$\vec{P}(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{für Di- und Paraelektrika,} \quad (8.22)$$

$$\vec{P}(\vec{0}) \neq \vec{0} \quad \text{für Ferroelektrika.} \quad (8.23)$$

Wenn wir \vec{P} für di- und paraelektrische Stoffe Taylor-entwickeln, erhalten wir

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^3 \beta_{ijk} E_j E_k + \dots \quad (8.24)$$

Solange die Felder nicht zu stark sind, können die Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden, so dass wir sie im Folgenden weglassen.

Für *isotrope Dielektrika* gilt außerdem

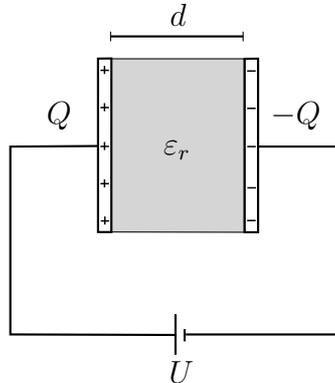
$$\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \gamma \vec{E} =: \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (8.25)$$

mit der *elektrischen Suszeptibilität* χ_e . Für die dielektrische Verschiebung ergibt sich daraus

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (8.26)$$

mit der (relativen) *Dielektrizitätskonstanten* ε_r . Dabei handelt es sich um eine Materialkonstante, also eine Messgröße, die einen einfachen Zusammenhang zwischen \vec{E} und \vec{D} herstellt, ohne dass dafür eine detaillierte Kenntnis der zugrundeliegenden mikroskopischen Vorgänge erforderlich ist.

Beispiel: Plattenkondensator mit Dielektrikum



$\pm Q$: freie Überschussladungen auf den Kondensatorplatten

A : Fläche der Platten

$$\Rightarrow \sigma = \pm \frac{Q}{A} \quad (8.27)$$

Wir wollen die *Kapazität* des Kondensators

$$C = \frac{Q}{U} \quad (8.28)$$

berechnen.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir Randeffekte, d.h. wir nehmen an, dass das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten näherungsweise konstant ist und außerhalb dieses Bereichs verschwindet. Aus dem Verhalten der Normalkomponenten von \vec{D} an den Grenzflächen folgt dann für das \vec{D} -Feld

$$D = \vec{D} \cdot \vec{n} = \sigma = \frac{Q}{A}. \quad (8.29)$$

Daraus ergibt sich für das \vec{E} -Feld

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A}. \quad (8.30)$$

Die Spannung U ist die Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten. Da das Potenzial nach wie vor über

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (8.31)$$

mit dem \vec{E} -Feld zusammenhängt, erhalten wir

$$U = \left| \int d\vec{r} \cdot \vec{E} \right| = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r A}. \quad (8.32)$$

Für die Kapazität ergibt sich also

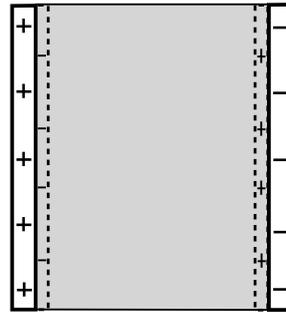
$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}. \quad (8.33)$$

Da $\epsilon_r > 1$ gilt, erhöht sich also die Kapazität durch das Medium.

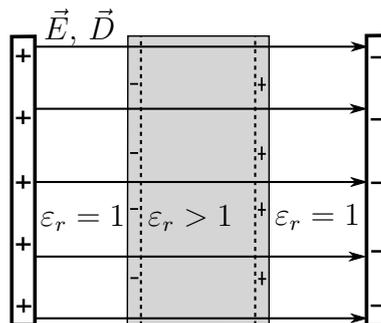
Interpretation:

An der Oberfläche des Dielektrikums bilden sich Polarisationsladungen, die das \vec{E} -Feld abschwächen.

Bei konstant gehaltenen Ladungen auf den Platten nimmt daher die Spannung ab. Umgekehrt muss sich bei konstant gehaltener Spannung eine größere Menge freier Ladungen auf den Platten ansammeln.



Ausgehend von diesem Beispiel betrachten wir jetzt den Fall, dass das Dielektrikum mit $\epsilon_r > 1$ den Raum zwischen den Kondensatorplatten nicht vollständig ausfüllt, sondern dass auf beiden Seiten Vakuumbereiche existieren, in denen $\epsilon_r = 1$ gilt. Wir gehen weiterhin davon aus, dass die \vec{E} - und \vec{D} -Felder in den drei Bereichen jeweils homogen sind und die Feldlinien senkrecht auf den Grenzflächen stehen, so dass wir die Diskussion auf die Normalkomponenten beschränken können.



Das Verhalten an den Grenzflächen ist dann durch Gl. (8.20) gegeben. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass definitionsgemäß nur die freien Ladungen zur makroskopischen Flächenladungsdichte σ beitragen, nicht aber die Polarisationsladungen. Folglich ist σ an den Grenzflächen des Dielektrikums gleich null, so dass $\vec{D} \cdot \vec{n}$ und damit \vec{D} stetig ist. Wir finden also, dass \vec{D} im gesamten Bereich zwischen den Kondensatorplatten konstant ist. Dagegen ist $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ im Dielektrikum kleiner als in den Vakuumbereichen, da ϵ_r größer ist. Physikalisch steckt dahinter, dass die Polarisationsladungen am Rand das \vec{E} -Feld im Inneren abschwächen.

Dieses Beispiel macht deutlich, dass das elektrische Feld \vec{E} die mikroskopisch fundamentale Größe ist, also das „tatsächliche“ Feld unter Einbeziehung aller Ladungen, der freien und der gebundenen. Die dielektrische Verschiebung \vec{D} ist dagegen nur eine effektive Größe, deren Einführung praktisch ist, weil man die Polarisationsladungen nicht zu kennen braucht.

8.2 Magnetostatik in Materie

Wir gehen völlig analog zur Elektrostatik vor:

Auf mikroskopischer Ebene gelten die für das Vakuum hergeleiteten magnetostatischen Gleichungen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_m = \mu_0 \vec{j}_m, \quad \vec{B}_m = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m, \quad (8.34)$$

wobei

- $\vec{j}_m(\vec{r})$ die mikroskopische Stromdichte,
- $\vec{B}_m(\vec{r})$ die mikroskopische magnetische Induktion,
- $\vec{A}_m(\vec{r})$ das mikroskopische Vektorpotenzial

bezeichnen.

Zur Berechnung von A_m betrachten wir wieder zwei Anteile. Zum einen haben wir das durch „freie“, also kontrollierbare Ströme hervorgerufene Feld

$$\vec{A}_{m,frei}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}_{frei}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8.35)$$

Daneben gibt es einen Anteil, der von der magnetischen Polarisierung der Materie herrührt. Diese hängt damit zusammen, dass die einzelnen Atome häufig ein magnetisches Moment besitzen.⁴³ Der Beitrag eines Atoms am Ort \vec{R}_j mit magnetischem Moment \vec{m}_j ist damit

$$\begin{aligned} \vec{A}_{m,j}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_j \times (\vec{r} - \vec{R}_j)}{|\vec{r} - \vec{R}_j|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{m}_j \delta(\vec{r}' - \vec{R}_j) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Mit der *mikroskopischen Magnetisierung*

$$\vec{M}_m(\vec{r}) := \sum_{j=1}^N \vec{m}_j \delta(\vec{r} - \vec{R}_j), \quad (8.37)$$

⁴³ Klassisch kann man sich das so vorstellen, dass die Elektronen um den Kern kreisen, was mit einem Strom verbunden ist. Quantenmechanisch bleibt das in etwa richtig, auch wenn es keine echten Bahnen mehr gibt. Hinzu kommen Spin-Effekte.

erhalten wir dann insgesamt für das mikroskopische Vektorpotenzial:

$$\begin{aligned}\vec{A}_m(\vec{r}) &= \vec{A}_{m,frei}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N \vec{A}_{m,j}(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\frac{\vec{j}_{frei}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M}_m(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).\end{aligned}\quad (8.38)$$

Für die makroskopische Beschreibung definieren wir nun

$$\vec{B} := \overline{\vec{B}_m}, \quad \vec{A} := \overline{\vec{A}_m}, \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\quad (8.39)$$

Analog zur Elektrostatik ergibt sich dann durch Mittelung von Gl. (8.38)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)\quad (8.40)$$

mit der makroskopischen Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) := \overline{\vec{j}_{frei}(\vec{r})}\quad (8.41)$$

und der *Magnetisierung*⁴⁴

$$\vec{M}(\vec{r}) := \overline{\vec{M}_m(\vec{r})}.\quad (8.42)$$

Den zweiten Term können wir wieder umformen:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},\end{aligned}\quad (8.43)$$

wobei wir im zweiten Schritt wieder partiell integriert haben. Das dabei auftretende Minuszeichen wurde durch das Vertauschen der Reihenfolge beim Vektorprodukt kompensiert.

Gl. (8.43) hat die Form des Vektorpotenzials im Vakuum für eine Stromdichte $\vec{j} + \vec{j}_M$, wobei

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})\quad (8.44)$$

als *Magnetisierungsstromdichte* bezeichnet wird. Wir können also wieder die Ergebnisse aus dem Vakuum verwenden, indem wir dabei \vec{j} durch $\vec{j} + \vec{j}_M$ ersetzen. Das liefert

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_M) = \mu_0(\vec{j} + \vec{\nabla} \times \vec{M})\quad (8.45)$$

⁴⁴ Analog zu $\overline{\vec{P}_m}$ und $\overline{\vec{P}}$ sind $\overline{\vec{M}_m}$ und $\overline{\vec{M}}$ die mikroskopische bzw. über \mathcal{V} gemittelte Dichte der magnetischen Momente.

und damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (8.46)$$

mit dem *Magnetfeld*

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}). \quad (8.47)$$

Für die Divergenz ergibt sich sofort durch Mittelung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = 0$, dass auch makroskopisch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.48)$$

gilt.

Es sollte noch einmal betont werden, dass die magnetische Induktion \vec{B} und nicht das Magnetfeld \vec{H} die mikroskopisch fundamentale Größe ist. Die historisch bedingte Namensgebung ist in dieser Hinsicht etwas irreführend.

Für isotrope Medien ohne permanente Magnetisierung können wir wieder eine lineare Beziehung zwischen \vec{M} und \vec{B} oder, was äquivalent ist, zwischen \vec{M} und \vec{H} ansetzen. Man schreibt

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (8.49)$$

mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_m . Daraus ergibt sich für das \vec{B} -Feld

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \quad (8.50)$$

mit der *relativen Permeabilität*

$$\mu_r := 1 + \chi_m. \quad (8.51)$$

Zusammengefasst lauten die Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik in Materie also in differenzieller Form

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \end{array}} \quad (8.52)$$

Die Zusammenhänge zwischen der dielektrischen Verschiebung \vec{D} und dem elektrischen Feld \vec{E} bzw. zwischen der magnetischen Induktion \vec{B} und dem Magnetfeld \vec{H} sind dabei im linearen isotropen Fall durch

$$\boxed{\begin{array}{llll} \vec{D} & = & \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & = & (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} & = & \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} & = & \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) & = & (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} & = & \mu_r \mu_0 \vec{H} \end{array}} \quad (8.53)$$

gegeben.

Einteilung magnetischer Materialien:

i) Diamagneten

Die Stoffe enthalten auch mikroskopisch keine permanenten magnetischen Dipole, sondern diese werden erst beim Einschalten des äußeren Magnetfeldes *induziert*. Nach der Lenz'schen Regel (\rightarrow Kapitel 9) wirken sie dem ursprünglichen Feld entgegen, d.h.

$$\chi_m < 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_r < 1. \quad (8.54)$$

Einen Extremfall stellen die Supraleiter dar. Für sie gilt $\chi_m = -1$ und damit $\mu_r = 0$. Das bedeutet, dass das \vec{B} -Feld in Supraleitern verschwindet (*Meißner-Ochsenfeld-Effekt*).

ii) Paramagneten

Auf atomarer Ebene vorhandene magnetische Dipole richten sich im äußeren Magnetfeld aus und verstärken es. Es gilt also

$$\chi_m > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_r > 1. \quad (8.55)$$

iii) kollektiver Magnetismus

Permanente mikroskopische Dipole richten sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_c auch ohne äußeres Magnetfeld spontan aus. Wichtigste Unterkategorie sind die *Ferromagneten*, bei denen sich die Dipole parallel ausrichten. Daneben gibt es u.a. auch *Antiferromagneten*, bei denen sich zwei Untergitter antiparallel ausrichten ($\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\dots$), so dass die Gesamtmagnetisierung verschwindet.

Grundsätzlich tritt der Diamagnetismus immer auf. Die damit verbundenen Suszeptibilitäten sind jedoch betragsmäßig viel kleiner als beim Para- oder Ferromagnetismus, so dass letzteres in den entsprechenden Stoffen überwiegt.

Verhalten an Grenzflächen:

Wenn in der Grenzfläche *kein freier Strom* fließt, lauten die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}. \quad (8.56)$$

Analog zur Elektrostatik mit $\sigma = 0$ sind daher die Normalkomponenten von \vec{B} und die Tangentialkomponenten von \vec{H} an der Grenzfläche stetig.

Kapitel 9

Elektrodynamik zeitlich veränderlicher Felder

Die bisher betrachteten Gleichungen gelten nur für zeitlich konstante Ladungs- und Stromverteilungen und damit verbunden zeitlich konstante \vec{E} - und \vec{B} -Felder. Diese Einschränkung wollen wir jetzt fallen lassen. Dabei werden wir sehen, dass die \vec{E} - und \vec{B} -Felder, die in den statischen Maxwell-Gleichungen separiert von einander auftreten, miteinander verkoppelt werden, so dass sie letztlich als verschiedene Facetten eines einheitlichen elektromagnetischen Feldes aufgefasst werden müssen.

9.1 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind die Experimente von Michael Faraday, in denen er 1831 den Einfluss eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes auf eine Leiterschleife untersuchte. Faraday fand, dass in der Leiterschleife ein Strom erzeugt („induziert“) wird, wenn

- in einem benachbarten zweiten Stromkreis ein Strom ein- oder ausgeschaltet wird,
- die benachbarte Stromschleife, in der ein zeitunabhängiger Strom fließt, gegenüber der ersten Schleife bewegt wird,
- ein Permanentmagnet relativ zur Stromschleife bewegt wird.

In allen drei Fällen ändert sich am Ort der Leiterschleife das \vec{B} -Feld. Da für die Erzeugung eines Stromflusses ein elektrisches Feld erforderlich ist, kann man schließen, dass ein zeitlich veränderliches \vec{B} -Feld ein \vec{E} -Feld hervorruft.

Genauer gesagt ergibt sich, dass die in der Leiterschleife \mathcal{C} induzierte Spannung⁴⁵

$$U_{ind} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (9.1)$$

proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses

$$\Phi_M = \int_{\mathcal{A}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (9.2)$$

durch eine Fläche \mathcal{A} ist, die von der Leiterschleife begrenzt wird, also

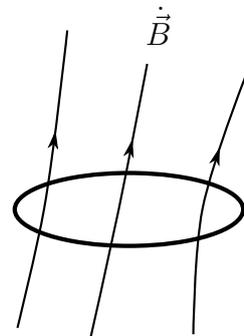
$$U_{ind} \propto -\frac{d}{dt}\Phi_M \quad (9.3)$$

mit $\partial\mathcal{A} = \mathcal{C}$. Dies ist das *Faraday'sche Induktionsgesetz*.

Das Minuszeichen ist die *Lenz'sche Regel*, die besagt, dass der induzierte Strom so gerichtet ist, dass das dadurch hervorgerufene Magnetfeld der Ursache entgegenwirkt.

Beispiel:

zeitliche Änderung des \vec{B} -Feldes:



⁴⁵ Die bei einem Umlauf ein einer Probeladung q geleistete Arbeit beträgt

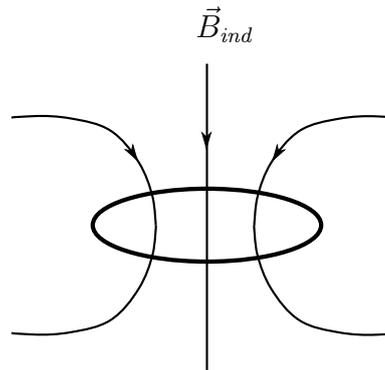
$$\Delta W = q \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = qU_{ind}.$$

Manchmal bezeichnet man U_{ind} auch als *elektromotorische Kraft*.

induzierter Strom:

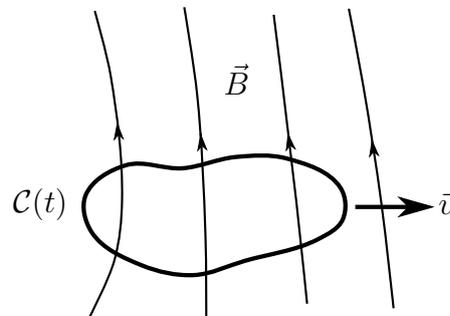


dadurch hervorgerufenen \vec{B} -Feld:



Wir wollen jetzt das Induktionsgesetz physikalisch motivieren und dabei gleichzeitig den Proportionalitätsfaktor bestimmen.

Dazu betrachten wir eine Leiterschleife $\mathcal{C}(t)$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} durch ein zeitunabhängiges, aber ortsabhängiges \vec{B} -Feld bewegt.



Da die Faraday'schen Experimente für ruhende Leiterschleifen, aber zeitlich veränderliche Magnetfelder durchgeführt wurden, betrachten wir nun die gleiche Situation aus Sicht eines mitbewegten Beobachters, der sich ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem bewegt. Wir nehmen an, dass $|\vec{v}|$ viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, so dass wir relativistische Effekte (Lorentz-Kontraktion, Zeitdilatation etc.) vernachlässigen können. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen

Koordinaten \vec{r} und den mitbewegten Koordinaten \vec{r}' lautet dann

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad (9.4)$$

Insbesondere gilt, dass der Weg \mathcal{C}' , der die Leiterschleife im mitbewegten System beschreibt, nicht von der Zeit abhängt, während \mathcal{C} zeitabhängig ist. Umgekehrt ist das \vec{B} -Feld, das laut Voraussetzung im ursprünglichen System zeitunabhängig ist, im mitbewegten System zeitabhängig:

$$\vec{B}'(\vec{r}', t) = \vec{B}(\vec{r}(\vec{r}', t)) = \vec{B}(\vec{r}' + \vec{v}t). \quad (9.5)$$

Der magnetische Fluss durch die Schleife zur Zeit t ist im mitbewegten System durch

$$\Phi'_M(t) = \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot \vec{B}'(\vec{r}', t). \quad (9.6)$$

gegeben, wobei \mathcal{A}' eine Fläche ist, die von der Leiterschleife \mathcal{C}' begrenzt wird.⁴⁶ Für die Zeitableitung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi'_M(t) &= \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}'(\vec{r}', t) \\ &= \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r}' + \vec{v}t) \\ &= \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t} \\ &= \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'}) \vec{B}'(\vec{r}', t), \end{aligned} \quad (9.7)$$

was wir mit Hilfe der Identität

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (9.8)$$

auf die Form

$$\frac{d}{dt} \Phi'_M(t) = - \int_{\mathcal{A}'} d\vec{\sigma}' \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)) \right) \quad (9.9)$$

⁴⁶ Unter unserer Annahme, dass $|\vec{v}|$ viel kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit, ist Φ'_M gleich dem magnetischen Fluss Φ_M im ursprünglichen System zur gleichen Zeit. Das ist aber für die weitere Diskussion irrelevant.

bringen können. Über den Stokes'schen Satz können wir die rechte Seite noch in ein Wegintegral umschreiben:

$$\frac{d}{dt} \Phi'_M(t) = - \oint_{C'} d\vec{r}' \cdot (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)). \quad (9.10)$$

Wir betrachten nun eine Ladung q , die an der Stelle \vec{r}' im Leiter ruht. Im ursprünglichen Koordinatensystem bewegt sich diese Ladung zusammen mit dem Leiter mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch das Magnetfeld und erfährt daher die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}(t) = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}(\vec{r}', t)) = q \vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t). \quad (9.11)$$

Da die beiden Bezugssysteme wie in der Mechanik äquivalent sein sollten („Galilei-Invarianz“), sollte die Kraft, die im mitbewegten System auf die Ladung ausgeübt wird, die gleiche sein, d.h.

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}(t) = q \vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t). \quad (9.12)$$

Da jedoch die Ladung im mitbewegten System ruht, kann dies keine Lorentz-Kraft sein, sondern es muss sich um eine elektrische Kraft handeln. Folglich muss es im mitbewegten System ein elektrisches Feld

$$\vec{E}'(\vec{r}', t) = \vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t). \quad (9.13)$$

geben. Die damit verbundene entlang der Leiterschleife induzierte Spannung ist dann

$$U'_{ind} = \oint_{C'} d\vec{r}' \cdot \vec{E}'(\vec{r}', t) = \oint_{C'} d\vec{r}' \cdot (\vec{v} \times \vec{B}'(\vec{r}', t)) \stackrel{(9.10)}{=} - \frac{d}{dt} \Phi'_M(t). \quad (9.14)$$

Das ist genau das Faraday'sche Gesetz! Insbesondere finden wir, dass die Proportionalitätskonstante gleich eins ist.

Es hat sich gezeigt, dass dieses Gesetz allgemein für ruhende geschlossene Wege und beliebige zeitabhängige \vec{B} -Felder gilt, also auch für solche, die nicht in einem bestimmten Koordinatensystem zeitunabhängig sind. Es gilt also

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} = - \frac{d}{dt} \int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = - \int_A d\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.15)$$

oder mit Hilfe des Stokes'schen Satzes

$$\int_A d\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0. \quad (9.16)$$

Da dies für beliebige Flächen \mathcal{A} gilt, muss der Integrand verschwinden. Wir finden also

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (9.17)$$

Dies ist das erste Beispiel einer Maxwell-Gleichung, bei der \vec{E} - und \vec{B} -Felder gemeinsam auftreten. Für zeitunabhängige \vec{B} -Felder reduziert sie sich auf die elektrostatische Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$. Für zeitabhängige \vec{B} -Felder ist das \vec{E} -Feld dagegen nicht mehr rotationsfrei.

Bemerkung:

Bei der obigen „Herleitung“ des Induktionsgesetzes aus der Galilei-Invarianz der physikalischen Gesetze mussten wir annehmen, dass die Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist. Es stellt sich heraus, dass das Endergebnis, also die Maxwell-Gleichung (9.17) dennoch in beliebigen Inertialsystemen gültig bleibt. In der Nähe von c werden jedoch relativistische Effekte wichtig, so dass einige der Zwischenschritte nicht mehr richtig sind. Die Maxwell-Gleichungen sind nicht Galilei- sondern Lorentz-invariant!

Man mag sich auch fragen, warum wir es akzeptieren sollten, dass im mitbewegten System ein elektrisches Feld induziert wird, das im ursprünglichen System nicht existiert, während wir andererseits in Gl. (9.5) angenommen haben, dass das \vec{B} -Feld von der Koordinatentransformation abgesehen in beiden Systemen gleich ist. In der Tat ergibt eine korrekte relativistische Behandlung des Problems, dass sich auch die Stärke des \vec{B} -Feldes ändert. Dieser Effekt kann jedoch bei kleinen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden.

9.2 Der Verschiebungsstrom und die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen

In der *Magnetostatik* hatten wir das Ampère'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (9.18)$$

gefunden. Bilden der Divergenz liefert

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0, \quad (9.19)$$

was in der Magnetostatik auch richtig ist. Für allgemeine zeitabhängige Fälle gilt dagegen die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (9.20)$$

so dass $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ nicht allgemein gelten kann. Um das Problem zu beheben, machte Maxwell den Ansatz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_D \quad (9.21)$$

mit einem noch zu bestimmenden Zusatzterm \vec{j}_D , der als *Maxwell'scher Verschiebungsstrom* bezeichnet wird. Daraus ergibt sich dann

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D \quad (9.22)$$

und damit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_D = \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (9.23)$$

Im vorletzten Schritt haben wir dabei die Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ verwendet.

Gl. (9.23) wird offensichtlich durch

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.24)$$

gelöst. Obwohl diese Lösung nicht eindeutig ist, schlug Maxwell daher vor, das Ampère'sche Gesetz durch die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.25)$$

auf zeitabhängige Fälle zu verallgemeinern. Ähnlich wie beim Faraday'schen Induktionsgesetz ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld ein elektrisches Feld induziert, ruft demnach ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld hervor!

Der Name „Verschiebungsstrom“ für \vec{j}_D ist historisch auf den Zusammenhang mit der „Verschiebungsdichte“ \vec{D} in Gl. (9.24) und die Tatsache zurückzuführen, dass \vec{j}_D die Dimension einer Stromdichte hat. Darüber hinaus hat der Name aber keine tiefere Bedeutung.

Die *vollständigen Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik* lauten damit (in differenzieller Form):

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} &= \vec{j} \end{aligned} \right\} \text{ inhomogene Maxwell-Gln.}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \text{ homogene Maxwell-Gln.}$$
(9.26)

Dabei gelten die schon früher angegebenen Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) &= (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} &= \mu_r \mu_0 \vec{H}, \end{aligned}$$
(9.27)

wobei jeweils für die beiden letzten Ausdrücke in jeder Zeile isotrope Medien und lineares Verhalten angenommen wurde. Insbesondere im Vakuum reduziert sich das auf $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

9.3 Elektromagnetische Wellen

In der Elektro- und Magnetostatik waren elektrische und magnetische Felder stets an das Vorhandensein von Ladungen bzw. Strömen gebunden. Im zeitabhängigen Fall ist das jedoch nicht mehr so. Wie wir gesehen haben, erzeugt ein zeitabhängiges Magnetfeld ein elektrisches Feld und umgekehrt. Dadurch können diese Felder in zeitabhängiger Form auch ganz ohne Ladungen und Ströme existieren.

Betrachten wir dazu die Maxwell-Gleichungen im Vakuum (d.h. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$) für den Fall $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$. Aus Gl. (9.26) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}. \end{aligned}$$
(9.28)

Daraus ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}}.$$
(9.29)

Andererseits gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \quad (9.30)$$

d.h. wir finden

$$\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}. \quad (9.31)$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{B}} \\ &= \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \Delta \vec{B}, \end{aligned} \quad (9.32)$$

d.h.

$$\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{B}} = \Delta \vec{B}. \quad (9.33)$$

Wir haben also zwei identische partielle Differenzialgleichungen für \vec{E} und \vec{B} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{0}, \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Dabei ist

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (9.35)$$

die *Lichtgeschwindigkeit* im Vakuum! In der Tat handelt es sich, wie wir gleich sehen werden, bei Gl. (9.34) um so genannte Wellengleichungen, also um Differenzialgleichungen, die die Ausbreitung von Wellen beschreiben, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit gerade c entspricht.

Die Differenzialgleichungen sind zweiter Ordnung sowohl in den räumlichen Komponenten als auch in der Zeit.⁴⁷ In diesem Zusammenhang verwendet man oft den *D' Alembert-Operator* („Quabla“)

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (9.36)$$

⁴⁷Im Gegensatz dazu ist die Schrödinger-Gleichung, also die Wellengleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik, zwar ebenfalls zweiter Ordnung in den räumlichen Komponenten, jedoch erster Ordnung in der Zeit. Dieser Unterschied hängt mit der relativistischen Natur des Lichts zusammen, die eine Gleichbehandlung von Orts- und Zeitkoordinaten erfordert.

so dass Gl. (9.34) in der kompakten Form

$$\square \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}, \quad \square \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.37)$$

geschrieben werden kann.

Die Gleichungen gelten komponentenweise, d.h. wir haben sechs entkoppelte Gleichungen der Form

$$\square \psi(\vec{r}, t) = 0, \quad \psi \in \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}. \quad (9.38)$$

Um sie zu lösen, machen wir den Exponentialansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.39)$$

mit einer *Amplitude* ψ_0 , dem *Wellenvektor* \vec{k} und der *Kreisfrequenz* ω , die jeweils konstant in \vec{r} und t sind. Ähnlich wie beim harmonischen Oszillator haben wir der Einfachheit halber einen komplexen Ansatz gewählt. Um die physikalischen Lösungen für die \vec{E} - und \vec{B} -Felder zu bekommen, sollte man am Ende wieder den Realteil bilden.

Einsetzen in Gl. (9.38) liefert

$$\square \psi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) \psi = 0, \quad (9.40)$$

d.h. es muss gelten:

$$\omega = c|\vec{k}| \equiv ck. \quad (9.41)$$

Eine solche Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl $|\vec{k}|$ bezeichnet man als *Dispersionsrelation*.

Um die Lösungen zu interpretieren, betrachten wir im Folgenden Flächen gleicher Phase

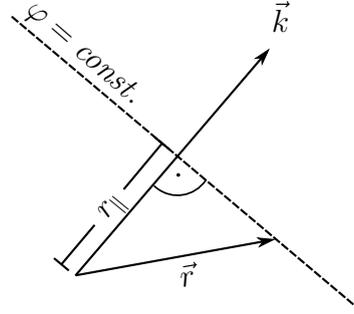
$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \varphi_0 = \text{const.} \quad (9.42)$$

Beispielsweise ergibt sich $\psi = \pm \psi_0$ für $\varphi_0 = 2n\pi$ bzw. $\varphi_0 = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, was für reelle ψ_0 und nach Bildung des Realteils von ψ den Wellenberg- bzw. Wellentälern entspricht.

Zunächst betrachten wir die Wellenfronten zu einer festgehaltenen Zeit t_0 . Für die Orte der Phase φ_0 gilt dann

$$r_{\parallel} := \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{r} = \frac{1}{k}(\varphi_0 + \omega t_0) = \text{const.}, \quad (9.43)$$

d.h. die Punkte gleicher Phase liegen in einer Ebene, die im Abstand r_{\parallel} vom Ursprung senkrecht zu \vec{k} verläuft.



Die *Wellenlänge* λ ist der Abstand Δr_{\parallel} zweier Wellenfronten mit Phasendifferenz 2π , d.h.

$$2\pi = \Delta\varphi = \vec{k} \cdot \Delta\vec{r} = k\Delta r_{\parallel} = k\lambda. \quad (9.44)$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (9.45)$$

Als nächstes untersuchen wir, wie sich die Lösungen als Funktion der Zeit verhalten. Für die Orte konstanter Phase gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{r}(t) - \omega t = kr_{\parallel}(t) - \omega t = \varphi_0 = \text{const.} \quad (9.46)$$

Daraus folgt für den Abstand der Wellenfront vom Ursprung

$$r_{\parallel}(t) = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi_0) \quad (9.47)$$

und damit für die *Phasengeschwindigkeit*, d.h. für die Geschwindigkeit, mit der sich die Ebenen gleicher Phase fortbewegen,

$$\dot{r}_{\parallel}(t) = \frac{\omega}{k} \stackrel{(9.41)}{=} c. \quad (9.48)$$

Insgesamt finden wir also: Die Lösungen entsprechen *ebenen Wellen* mit Wellenfronten senkrecht zu \vec{k} und Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c in Richtung \vec{k} ausbreiten.⁴⁸

Wir müssen noch einmal auf den Anfang des Abschnitts zurückkommen. Um in den Maxwell-Gleichungen (9.28) die \vec{E} - und \vec{B} -Felder zu entkoppeln, haben

⁴⁸Das bedeutet aber nicht, dass ebene Wellen die einzigen Lösungen sind. Vielmehr kann man sich leicht davon überzeugen, dass beliebige Linearkombinationen von ebenen Wellen mit unterschiedlichen Wellenvektoren ebenfalls die Wellengleichung lösen.

wir ein zweites Mal die Rotation gebildet und damit aus partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die Wellengleichungen (9.37) hergeleitet, die partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind. Für diese haben wir dann die Lösungen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \omega = ck, \quad (9.49)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)}, \quad \omega' = ck' \quad (9.50)$$

gefunden, wobei die Amplituden \vec{E}_0 und \vec{B}_0 sowie die Wellenvektoren \vec{k} und \vec{k}' zunächst einmal beliebige Parameter sind.⁴⁹ Wir müssen jedoch noch überprüfen, ob diese Lösungen der Wellengleichungen auch tatsächlich die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen lösen.

Dazu betrachten wir zunächst die Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \stackrel{!}{=} -\dot{\vec{B}} = i\omega' \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)}, \quad (9.51)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = i\vec{k}' \times \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (9.52)$$

Offensichtlich können diese Gleichungen nur dann für alle \vec{r} und t erfüllt sein, wenn

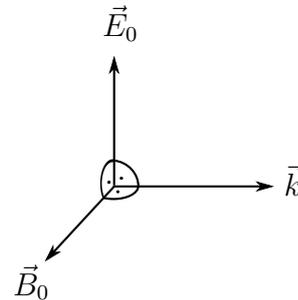
$$\vec{k}' = \vec{k} \quad (9.53)$$

und damit $\omega' = \omega$ gilt. Außerdem muss gelten:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 = ck \vec{B}_0 \quad (9.54)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 = -\frac{k}{c} \vec{E}_0. \quad (9.55)$$

Daraus folgt, dass \vec{E}_0 , \vec{B}_0 und \vec{k} jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. Da sich die Welle, wie wir gesehen haben, in \vec{k} -Richtung ausbreitet, bedeutet das insbesondere, dass die \vec{E} - und \vec{B} -Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung oszillieren. Es handelt sich also um eine *transversale Welle*.



⁴⁹Genau genommen könnten wir sogar für jede einzelne Komponente von \vec{E} und \vec{B} einen anderen Wellenvektor wählen, da die Wellengleichungen unabhängig von einander sind.

Für die Amplituden ergibt sich

$$|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|. \quad (9.56)$$

Zuletzt müssen wir noch die Maxwell-Gleichungen für die Divergenz überprüfen. Auf Grund der Transversalität folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \stackrel{\vec{k} \perp \vec{E}}{=} 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = i\vec{k} \cdot \vec{B} \stackrel{\vec{k} \perp \vec{B}}{=} 0, \quad (9.57)$$

d.h. diese Gleichungen sind automatisch erfüllt.

9.3.1 Polarisation

Elektromagnetische Wellen können unterschiedlich polarisiert sein. Dazu betrachten wir im Folgenden o.B.d.A. eine ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, also

$$\vec{k} = k \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = kz. \quad (9.58)$$

Auf Grund der Transversalität liegen \vec{E} und \vec{B} dann in der x - y -Ebene. Außerdem können wir uns auf die Diskussion des \vec{E} -Feldes beschränken, aus dem wir das \vec{B} -Feld jederzeit mit Hilfe von Gl. (9.54) berechnen können:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}. \quad (9.59)$$

In Gl. (9.39) hatten wir einen komplexen Ansatz für die Lösung der Wellengleichung gemacht, Die Amplituden können dabei ebenfalls komplex sein. Für die Komponenten des \vec{E} -Feldes bedeutet das

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\varphi_x} \quad \Rightarrow \quad E_x = |E_{0x}| e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)}, \quad (9.60)$$

$$E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\varphi_y} \quad \Rightarrow \quad E_y = |E_{0y}| e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)} \quad (9.61)$$

mit zwei unabhängigen Phasen φ_x und φ_y .

Die physikalischen Lösungen ergeben sich daraus durch Bildung des Realteils.

Mit $\varphi_x \equiv \varphi$ und $\varphi_y \equiv \varphi + \delta$ ergibt sich dann

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi), \quad (9.62)$$

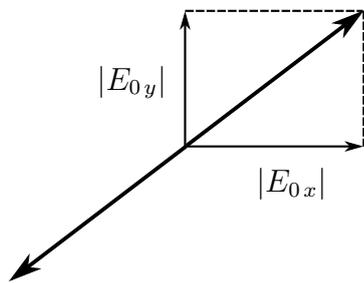
$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta). \quad (9.63)$$

Dabei können wir verschiedene Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{(|E_{0x}| \vec{e}_x \pm |E_{0y}| \vec{e}_y)}_{\text{konstanter Vektor}} \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad (9.64)$$

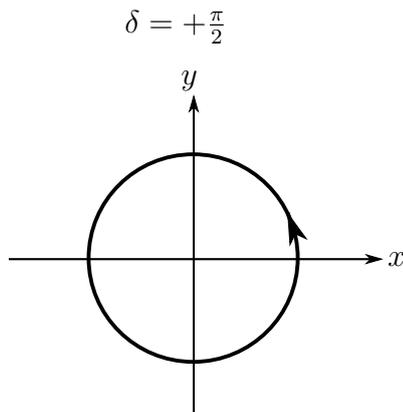
z.B. $\delta = 0$



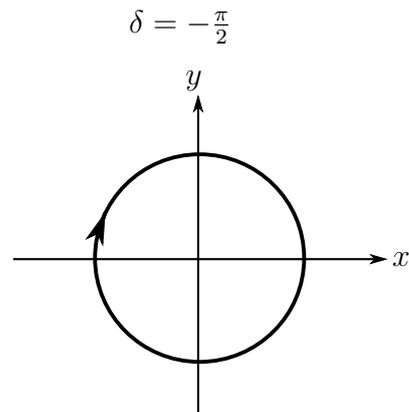
$\hat{=}$ Schwingung in einer festen Richtung:
lineare Polarisation

Fall 2: $|E_{0x}| = |E_{0y}| \equiv E$, $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(\cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y) \quad (9.65)$$



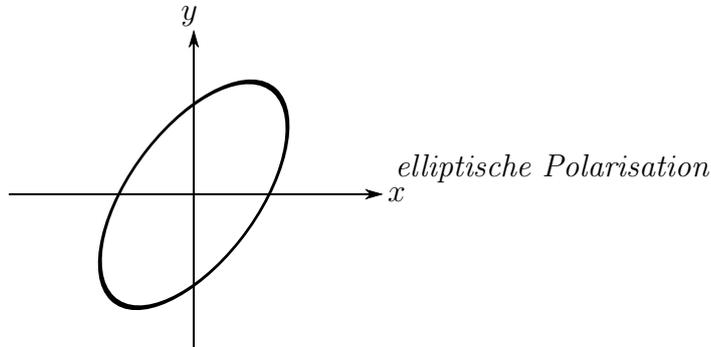
links-zirkular polarisiert



rechts-zirkular polarisiert

Dabei ist zu beachten, dass sich die Welle in z -Richtung, also im Bild auf den Beobachter zu bewegt. Bei rechts-zirkular polarisierten Wellen dreht sich also die Richtung des \vec{E} -Feldes aus Sicht des Beobachters „rechts herum“, also im Uhrzeigersinn.

Fall 3: allgemeiner Fall



9.4 Elektromagnetische Potenziale

In der Elektro- und Magnetostatik konnten wir aus den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.66)$$

folgern, dass sich \vec{E} und \vec{B} gemäß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.67)$$

aus den Potenzialen ϕ und \vec{A} herleiten lassen. Dies wollen wir jetzt auf die Elektrodynamik erweitern, so dass auch dort die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.68)$$

automatisch erfüllt werden.

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (9.69)$$

ein geeigneter Ansatz bleibt. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}), \quad (9.70)$$

was analog zum elektrostatischen Fall automatisch erfüllt ist, wenn

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\phi \quad (9.71)$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t). \quad (9.72)$$

Wie schon in der Elektro- und Magnetiostatik sind die Potentiale ϕ und \vec{A} nicht eindeutig, sondern \vec{B} und \vec{E} sind invariant unter den folgenden *Eichtransformationen*

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \quad (9.73)$$

$$\phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \dot{\chi}(\vec{r}, t) \quad (9.74)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(\vec{r}, t)$.

Beweis:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_{=\vec{0}} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (9.75)$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \dot{\vec{A}}' = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\dot{\chi} - \dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\dot{\chi} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} = \vec{E} \quad (9.76)$$

Als nächstes wollen wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ und $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$ durch die Potentiale ϕ und \vec{A} ausdrücken. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf das Vakuum, also $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}. \quad (9.77)$$

Einsetzen von Gl. (9.72) in die erste Gleichung liefert

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}) = -\Delta\phi - \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (9.78)$$

was als zeitabhängige Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung angesehen werden kann. Aus der zweiten Gleichung erhält man mit Gl. (9.69) und Gl. (9.72)

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}} - \frac{1}{c^2} (-\vec{\nabla}\dot{\phi} - \ddot{\vec{A}}) = \mu_0 \vec{j} \quad (9.79)$$

und damit

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi}) = \mu_0 \vec{j}, \quad (9.80)$$

wobei wir den Laplace-Operator und die zweifache Zeitableitung zum D'Alembert-Operator zusammengefasst haben.

Diese noch recht komplizierten Gleichungen lassen sich durch die Wahl bestimmter Eichungen vereinfachen.

- Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$

Ableitung nach der Zeit liefert $\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = 0$. Damit folgt aus Gl. (9.78)

$$\Delta \phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (9.81)$$

In Coulomb-Eichung ist die Beziehung zwischen ϕ und ρ also auch im zeitabhängigen Fall durch die Poisson-Gleichung gegeben. Sofern keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen, lautet die Lösung demnach analog zur Elektrostatik

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9.82)$$

Aus Gl. (9.80) erhält man zunächst

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \dot{\phi}(\vec{r}, t). \quad (9.83)$$

Einsetzen von Gl. (9.82) und $\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$ liefert dann

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (9.84)$$

was nach Verwendung der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9.85)$$

ergibt. In dieser Form ist das Vektorpotenzial – ähnlich wie in der Magnetostatik – allein durch durch Vorgabe einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}, t)$ festgelegt. Allerdings ist die zu lösende partielle Differenzialgleichung wesentlich komplizierter.

- Lorenz-Eichung:⁵⁰ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$

Ableiten nach der Zeit ergibt $\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \ddot{\phi}$. Wir erhalten also aus Gl. (9.78)

$$-\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9.86)$$

und damit

$$\square\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (9.87)$$

Außerdem ergibt sich unmittelbar aus Gl. (9.80)

$$\square\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (9.88)$$

In Lorenz-Eichung erhalten wir also vier entkoppelte Wellengleichungen für ϕ und die drei Komponenten von \vec{A} . Insbesondere in Abwesenheit von Ladungen und Strömen besitzen die Gleichungen die gleiche Gestalt wie die Wellengleichungen für die \vec{E} - und \vec{B} -Felder.

Der Vergleich der beiden Eichungen bringt einen bemerkenswerten Unterschied zu Tage: In Lorenz-Eichung ist $\phi(\vec{r}, t)$ die Lösung einer Wellengleichung. Dabei breiten sich die Wellen mit Lichtgeschwindigkeit aus. Eine Änderung der Ladung am Ort \vec{r}' zur Zeit führt am Ort \vec{r} daher erst nach einer Zeit $\Delta t = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ zu einer Änderung des Potentials. Wie man aus Gl. (9.82) sieht, führen dagegen in Coulomb-Eichung Ladungsänderungen instantan, d.h. ohne Zeitverzögerung, zu einer Änderung von ϕ an beliebig weit entfernten Orten. Dies erscheint zunächst unphysikalisch. Wie wir gesehen haben, führen jedoch unterschiedliche Eichungen auf dieselben \vec{E} - und \vec{B} -Felder und sind daher physikalisch äquivalent. Insbesondere sind ϕ und \vec{A} selbst nicht messbar. Die Tatsache, dass sich ϕ in Coulomb-Eichung mit Überlichtgeschwindigkeit (nämlich unendlich schnell) ausbreiten kann, hat damit keine messbaren Konsequenzen. Änderungen der messbaren \vec{E} - und \vec{B} -Felder breiten sich dagegen – unabhängig von der Eichung – nur mit Lichtgeschwindigkeit aus.

9.5 Energie des elektromagnetischen Feldes

Betrachten wir eine Punktladung q , die sich unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.89)$$

⁵⁰benannt nach dem Dänen Ludvig Lorenz, nicht zu verwechseln mit dem Niederländer Hendrik Antoon Lorentz

durch ein elektromagnetisches Feld bewegt. Die bei einer infinitesimalen Verschiebung $d\vec{r} = \vec{v} dt$ an der Ladung geleistete Arbeit beträgt

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt + q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} dt = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt. \quad (9.90)$$

Das \vec{B} -Feld leistet also keine Arbeit. Somit ergibt sich für die Leistung des Feldes an der Ladung

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (9.91)$$

Das verallgemeinern wir nun auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung in einem Volumen \mathcal{V} , indem wir die Punktladung durch ein Integral über die Ladungsdichte ersetzen und dann die Beziehung $\vec{j} = \rho\vec{v}$ verwenden:

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (9.92)$$

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}$ können wir das vollständig durch elektromagnetische Felder ausdrücken. Anschließend formen wir den Integranden mit

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (9.93)$$

noch weiter um:

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) = -\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (9.94)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} + \mu_0 \mu_r \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}^2 + \mu_0 \mu_r \vec{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (9.95)$$

und damit

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (9.96)$$

Für die Leistung ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= - \int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}), \end{aligned} \quad (9.97)$$

wobei wir für das zweite Integral den Gauß'schen Satz verwendet haben.

Zusammen mit Gl. (9.92) erhalten wir damit den Energiesatz

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{E} \cdot \vec{j}}_{\frac{d}{dt} W_{mech}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})}_{\frac{d}{dt} W_{Feld}} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}_{\Phi_{\mathcal{E}}} = 0, \quad (9.98)$$

wobei wir die einzelnen Terme folgendermaßen interpretieren:

- W_{mech} : Energie der Ladungsträger in \mathcal{V}
- W_{Feld} : Energie des elektromagnetischen Feldes in \mathcal{V}
- $\Phi_{\mathcal{E}}$: Energiefluss des Feldes durch die Oberfläche aus \mathcal{V} heraus

Die Gesamtenergie bleibt also erhalten, indem sich die Änderung der Energien der Ladungsträger und des elektromagnetischen Feldes in \mathcal{V} und der Energiefluss des Feldes aus \mathcal{V} heraus zu null addieren.

Entsprechend können wir

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (9.99)$$

als die *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes*⁵¹ und

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.100)$$

als die zugehörige *Energiestromdichte* identifizieren. \vec{S} wird auch als *Poynting-Vektor* bezeichnet.

Mit diesen Definitionen lautet der Energiesatz also

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r w + \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S} = 0 \quad (9.101)$$

oder, wenn wir wieder den Gauß'schen Satz verwenden,

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \left(\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) = 0. \quad (9.102)$$

⁵¹ Für die Elektrostatik im Vakuum ergibt sich daraus $w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$ in Übereinstimmung mit Gl. (6.76).

Da dies für beliebige Volumina gilt, folgt schließlich

$$\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (9.103)$$

(Satz von Poynting).

Als Beispiel berechnen wir w und \vec{S} für eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum. Für die Felder gelten dann die Zusammenhänge

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (9.104)$$

Daraus folgt

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (9.105)$$

sowie

$$\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \right)^2 = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (9.106)$$

Für die Energiedichte ergibt sich somit

$$w = \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2, \quad (9.107)$$

wobei elektrisches und magnetisches Feld gleich viel zur Energiedichte beitragen.

Für die Energiestromdichte finden wir

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left\{ \vec{E}^2 \frac{\vec{k}}{k} - \underbrace{\left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)}_{=0} \vec{E} \right\}, \quad (9.108)$$

also

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}^2 \frac{\vec{k}}{k}. \quad (9.109)$$

Wenn wir das mit der Energiedichte vergleichen, ergibt sich der Zusammenhang

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c w(\vec{r}, t) \frac{\vec{k}}{k}. \quad (9.110)$$

Das kann man folgendermaßen verstehen: Die Energie $|\vec{S}| A dt$, die pro Zeit dt durch die Fläche A strömt, ist gleich der Energie $w dV$, die im Volumen $dV = A d\ell$ enthalten ist, wobei $d\ell = c dt$ die Strecke ist, die das Licht in der Zeit dt zurücklegt:

$$|\vec{S}| A dt = w dV = w A d\ell = w A c dt \quad \Rightarrow \quad |\vec{S}| = c w. \quad (9.111)$$

Dabei strömt die Energie in Richtung \vec{k} , d.h. in Ausbreitungsrichtung der Welle.

Zur Berechnung von w oder \vec{S} müssen wir natürlich die reellen physikalischen Felder verwenden. Bei Produkten ist dabei zu beachten, dass

$$\operatorname{Re}(a) \cdot \operatorname{Re}(b) \stackrel{i.A.}{\neq} \operatorname{Re}(a \cdot b) = \operatorname{Re}(a) \cdot \operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a) \cdot \operatorname{Im}(b), \quad (9.112)$$

d.h. wir dürfen den Realteil nicht erst ganz am Schluss bilden. Für die im Zusammenhang mit der Polarisation in Abschnitt 9.3.1 diskutierten ebenen Wellen gilt dann beispielsweise

$$w(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left(|E_{0x}|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) + |E_{0y}|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi + \delta) \right). \quad (9.113)$$

Oft sind aber nur zeitlich gemittelte Größen relevant, da die Wellen sehr schnell oszillieren. Es gilt

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}. \quad (9.114)$$

Für sichtbares Licht mit $\lambda \sim 500$ nm ergibt sich daraus eine Frequenz von etwa $6 \cdot 10^{14}$ Hz, also eine Periode $T = 1/\nu$ von der Größenordnung 10^{-15} s. Für eine gegebene Observable $f(\vec{r}, t)$ definieren wir daher die über eine Periode gemittelte Größe als

$$\bar{f}(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\vec{r}, t). \quad (9.115)$$

Insbesondere wollen wir die zeitlich gemittelten Werte von w und \vec{S} berechnen.

Es zeigt sich, dass dies recht einfach möglich ist, wenn wir von den komplexen mathematischen Lösungen ausgehen. Betrachten wir dazu zwei komplexe Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Dann gilt

$$\operatorname{Re}(\vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}^*), \quad \operatorname{Re}(\vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b}^*) \quad (9.116)$$

und daher

$$\overline{\operatorname{Re}(\vec{a}) \cdot \operatorname{Re}(\vec{b})} = \frac{1}{4} \overline{(\vec{a} + \vec{a}^*) \cdot (\vec{b} + \vec{b}^*)} = \frac{1}{4} (\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}^*} + \overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}} + \overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}^*}). \quad (9.117)$$

Seien nun

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{b}(t) = \vec{b}_0 e^{-i\omega t} \quad (9.118)$$

und damit

$$\vec{a}^*(t) = \vec{a}_0^* e^{i\omega t}, \quad \vec{b}^*(t) = \vec{b}_0^* e^{i\omega t}. \quad (9.119)$$

Die Mittelung über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ liefert dann

$$\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}^*} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^* = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*, \quad (9.120)$$

$$\overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}} = \vec{a}_0^* \cdot \vec{b}_0 = (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*)^* \quad (9.121)$$

und

$$\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \overline{\vec{a}^* \cdot \vec{b}^*} = 0. \quad (9.122)$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{\text{Re}(\vec{a}) \cdot \text{Re}(\vec{b})} = \frac{1}{4} (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^* + (\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*)^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0^*) \quad (9.123)$$

und analog

$$\overline{\text{Re}(\vec{a}) \times \text{Re}(\vec{b})} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0^*). \quad (9.124)$$

Wenden wir das auf die Gleichungen (9.99) und (9.100) an, finden wir für die zeitlich gemittelte Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes

$$\overline{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \text{Re}(\vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{D}_0^*(\vec{r}) + \vec{H}_0(\vec{r}) \cdot \vec{B}_0^*(\vec{r})), \quad (9.125)$$

$$\overline{\vec{S}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_0(\vec{r}) \times \vec{H}_0^*(\vec{r})) \quad (9.126)$$

mit den *komplexen* Amplituden $\vec{E}_0(\vec{r})$, $\vec{D}_0(\vec{r})$, $\vec{H}_0(\vec{r})$ und $\vec{B}_0(\vec{r})$.

Zuletzt wollen wir dies wieder auf die ebenen elektromagnetischen Wellen im Vakuum anwenden. Um die oben eingeführte Notation zu verwenden, schreiben wir

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \equiv \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \text{d.h.} \quad \vec{E}_0(\vec{r}) \equiv \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.127)$$

und analog für \vec{D} , \vec{H} und \vec{B} . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{D}_0^*(\vec{r})) &= \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \vec{D}_0^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \\ &= \text{Re}(\vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^*) = \varepsilon_0 \text{Re}(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) = \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \end{aligned} \quad (9.128)$$

etc. Die zeitlichen Mittel hängen also bei einer ebenen Welle auch nicht mehr vom Ort ab, was anschaulich klar ist.

Aus Gl. (9.107) und Gl. (9.109) folgt dann schließlich

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}_0|^2, \quad (9.129)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|\vec{E}_0|^2\frac{\vec{k}}{k}. \quad (9.130)$$

Insbesondere gilt also auch für die gemittelten Größen wieder der Zusammenhang $\vec{S} = c\bar{w}\frac{\vec{k}}{k}$.

Teil III

Spezielle Relativitätstheorie

Kapitel 10

Lorentz-Transformationen

10.1 Grenzen des Newton'schen Weltbilds

Wie wir in Kapitel 1 diskutiert haben, ging Newton von der Existenz eines dreidimensionalen euklidischen Raums und einer davon unabhängigen absoluten Zeit aus. Dabei gibt es bestimmte Bezugssysteme, die Inertialsysteme, in denen die Newton'schen Gesetze gelten, insbesondere das zweite Newton'sche Gesetz (N2)

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (10.1)$$

wobei wir im zweiten Schritt $m = \text{const.}$ angenommen haben.

Eine wichtige Konsequenz ist die so genannte *Galilei-Invarianz*:

Ist K ein Inertialsystem und K' ein Bezugssystem, das sich relativ zu K mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, dann ist K' ebenfalls ein Inertialsystem.

Dies folgt direkt aus Gl. (1.12): Für eine konstante Relativgeschwindigkeit \vec{v} gilt

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}t \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}}(t) = \vec{0} \quad (10.2)$$

und somit $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$. In beiden Systemen werden also die gleichen Beschleunigungen beobachtet, was – unter der stillschweigenden Annahme, dass physikalische Kräfte (im Gegensatz zu Scheinkräften) nicht vom Bezugssystem abhängen – bedeutet, dass die Newton'schen Gesetze in beiden Systemen gleichermaßen gelten.

Für die Maxwell-Gleichungen scheint dies dagegen nicht zu gelten. Wie wir gesehen haben, sagen die Gleichungen elektromagnetische Wellen voraus, die sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ ausbreiten. Ausgehend von den Newton'schen Vorstellungen über Raum und Zeit kann

dies jedoch nur in einem bestimmten Bezugssystem gelten. Beispielsweise würde man naiv annehmen, dass ein Beobachter, der sich mit Lichtgeschwindigkeit mit einer elektromagnetischen Welle mitbewegt, eine relativ zu ihm ruhende Welle beobachten müsste.⁵² Die Maxwell-Gleichungen scheinen also an die Existenz eines absoluten Bezugssystems, des so genannten *Äthers* gekoppelt zu sein.

Versuche, Bewegungen relativ zum Äther zu messen führten jedoch zu Widersprüchen:

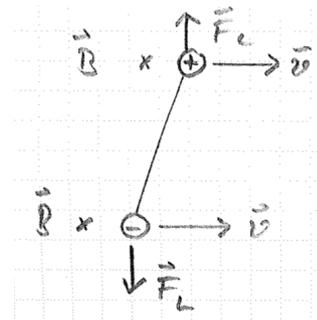
- Michelson-Morley-Experiment (1881, 1887)

Die gemessenen Lichtgeschwindigkeiten parallel und senkrecht zur Erdbewegung sind gleich.

- Trouton-Noble-Experiment (1903)

Idee: An den Enden eines im Labor ruhenden Stabes befinden sich zwei entgegengesetzte Ladungen. Durch die Erdbewegung bewegen sich die Ladungen relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Durch die damit zusammenhängenden Ströme wird ein \vec{B} -Feld erzeugt, was auf beide bewegten Ladungen eine Lorentzkraft wirken lässt und damit eine Drehmoment auf den Stab hervorruft.

Ein solches Drehmoment wird jedoch nicht gemessen.



Scheinbares Fazit der beiden Experimente: Die Erde ruht relativ zum Äther! Dies widerspricht jedoch nicht nur dem kopernikanischen Prinzip, wonach der Erde keine Sonderrolle zukommt, sondern auch einem anderen Experiment:

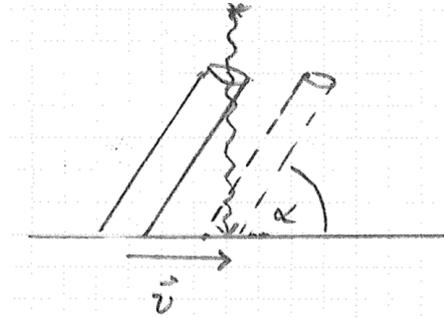
- Aberration des Sternenlichts

Ein Stern wird durch ein Fernrohr beobachtet. Während die Lichtwelle durch das Fernrohr läuft, bewegt sich der Erde weiter. Dadurch wird der Stern unter einem geringfügig anderen Winkel gesehen als ohne Erdbewegung. Da sich die Bewegungsrichtung der Erde während des Umlaufs um die Sonne ändert, ist der Effekt prinzipiell erkennbar.

⁵²Mit Gedankenexperimenten dieser Art soll sich Einstein schon mit 16 Jahren beschäftigt haben.

Bei senkrechtem Einfall (relativ zur Bewegungsrichtung der Erde) ergibt sich für den Winkel α , den das Fernrohr geneigt werden muss:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \quad (10.3)$$



Dieser Effekt wird tatsächlich beobachtet. Aus dem gemessenen Winkel ergibt sich $v \approx 30 \text{ km/s}$, was der Geschwindigkeit der Erdbewegung um die Sonne entspricht.

Aus der Aberration des Sternenlichts würde man also schließen, dass sich die Erde relativ zum Äther bewegt, was im Widerspruch zu den beiden zuerst diskutierten Experimenten steht.

10.2 Die Einstein'schen Postulate

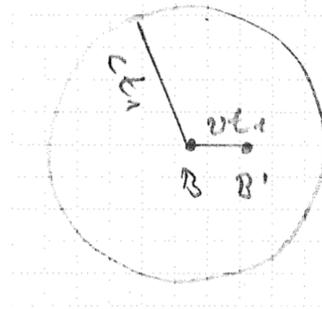
Auch ohne die im vorigen Abschnitt besprochenen empirischen Widersprüche im Detail zu kennen, empfand Einstein die für die Maxwell-Gleichungen scheinbar erforderliche Existenz eines absoluten Bezugssystems als Rückschritt gegenüber der Galilei-Invarianz der Newton'schen Gleichungen. Seine geniale Leistung bestand darin, daraus nicht auf einen Fehler in den Maxwell-Gleichungen zu schließen, sondern zu erkennen, dass das Problem in unseren Alltagsvorstellungen von Raum und Zeit liegt, von denen auch Newton ausgegangen ist. Einstein erkannte, dass diese Vorstellungen logisch nicht zwingend und empirisch unbewiesen sind, und ging statt dessen von den folgenden Postulaten aus:

1. Die Naturgesetze besitzen in jedem Inertialsystem die gleiche Form, insbesondere also auch in verschiedenen Inertialsystemen, die sich relativ zu einander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
(„Relativitätsprinzip“)
2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich.

Das Relativitätsprinzip entspricht grundsätzlich der Galilei-Invarianz der Newton'schen Mechanik. Das zweite Postulat scheint damit allerdings, wie im vorigen Abschnitt besprochen, unvereinbar zu sein. Sehen wir uns das anhand des folgenden Beispiels noch einmal etwas genauer an:

Am Ursprung eines Koordinatensystems K werde zur Zeit $t = 0$ ein Lichtblitz erzeugt, so dass von dort aus eine sphärische Lichtwelle ausgeht. Der Vorgang werde von zwei Beobachtern verfolgt: einem Beobachter B , der am Ursprung von K ruht, und einem Beobachter B' , der sich zur Zeit $t = 0$ am gleichen Ort befindet, sich gegenüber B jedoch mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Zu einer Zeit $t = t_1 > 0$ stellt sich die Situation für B folgendermaßen dar:

- B befindet sich im Zentrum einer kugelförmigen Lichtwelle, dessen Front eine Entfernung $r = ct_1$ von ihm erreicht hat.
- B' befindet sich in einer Entfernung vt_1 , d.h. ist nicht im Zentrum der Kugelwelle.



Insbesondere entfernt sich – aus Sicht von B – die Wellenfront nicht in jeder Richtung mit der Relativgeschwindigkeit c von B' , sondern die Relativgeschwindigkeit nimmt je nach Richtung Werte zwischen $c - v$ und $c + v$ an. Nach der Newton'schen Vorstellung würde man nun erwarten, dass sich für B' die Situation genauso darstellt, d.h. dass er sich nicht im Mittelpunkt der Kugelwelle befindet und diese sich von ihm nicht mit gleicher Geschwindigkeit c entfernt. Das widerspricht jedoch den Einstein'schen Postulaten.

Einsteins Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs besteht in einer kritischen Analyse des Begriffs der *Gleichzeitigkeit*. Die Wellenfront wird gebildet von den Orten, die von der Lichtwelle gleichzeitig erreicht werden. Wie wir sehen werden, sind jedoch Ereignisse, die für B gleichzeitig stattfinden, nicht notwendiger Weise auch für B' gleichzeitig und umgekehrt. Insbesondere werden die Punkte, die für B die Wellenfront zur Zeit $t = t_1$ bilden, aus Sicht von B' nicht alle zur gleichen Zeit von der Lichtwelle erreicht, bilden also keine Wellenfront. Dadurch wird es möglich, dass sich beide Beobachter im Zentrum einer Kugelwelle sehen, die sich mit Geschwindigkeit c von ihnen entfernt.

Gleichzeitigkeit

Jede Zeitmessung entspricht der Gleichzeitigkeit eines Ereignisses mit der Anzeige einer Uhr. Dies ist unproblematisch, wenn das Ereignis am Ort der Uhr stattfindet. Schwieriger wird es, wenn man beispielsweise die Laufzeit eines Körpers von A nach B messen möchte. In diesem Fall braucht man streng genommen zwei Uhren, eine Uhr am Ort A und eine am Ort B . Dazu müssen die beiden Uhren jedoch synchronisiert werden. Die naheliegende Vor-

schrift, zwei baugleiche Uhren zunächst am gleichen Ort zu synchronisieren und eine der Uhren dann an den anderen Ort zu bringen, ist problematisch, da die zweite Uhr dazu zwischenzeitlich beschleunigt werden muss, sich also nicht dauerhaft in einem Inertialsystem befindet, und unklar ist, was das für Konsequenzen hat. (Wir werden in Abschnitt 10.4 im Zusammenhang mit dem berühmten Zwillingsparadoxon sehen, dass dies tatsächlich Konsequenzen hat.) Einstein schlug daher folgende Vorschrift zur Synchronisation zweier relativ zu einander ruhender Uhren an den Orten A und B vor:

- Bei A wird zur Zeit t_0 ein Lichtsignal ausgesendet.
- Wenn das Signal bei B empfangen wird, wird von dort sofort ein Lichtsignal zurückgesendet.
- Dieses kommt zur Zeit $t_2 = t_0 + \delta t$ bei A an. Der Beobachter bei A schließt daraus, dass B das Signal zur Zeit $t_1 = t_0 + \delta t/2$ abgesendet hat.
- Dieses Ergebnis kann er nun, z.B. mittels eines weiteren Funksignals, dem Beobachter bei B mitteilen, der es mit der entsprechenden Zeit auf seiner Uhr identifizieren kann.
- Als Konsistenztest könnten nun beide Beobachter vereinbaren, sich gleichzeitig zur Zeit t_3 ein Lichtsignal zuzuschicken. Sie würden dann beide zur Zeit $t_4 = t_3 + \delta t/2$ das Signal des Gegenübers empfangen.

Auf diese Weise können sich die Beobachter bei A und B und analog auch Beobachter an weiteren relativ zu einander ruhenden Punkten auf eine gemeinsame Zeit einigen.

Dies gelingt jedoch nicht mehr, wenn sich die Beobachter relativ zueinander bewegen. Nehmen wir an, dass A und B in zwei verschiedenen Inertialsystemen ruhen, so dass sie sich von einander mit konstanter Geschwindigkeit entfernen. Würde, wie oben beschrieben, zunächst ein Lichtsignal von A nach B und postwendend zurück nach A geschickt, würde der Beobachter bei A das Ergebnis genauso interpretieren wie zuvor. Insbesondere würde er wieder davon ausgehen, dass sein Signal zur Zeit $t_1 = t_0 + \delta t/2$ am Ort B empfangen wurde, der zu diesem Zeitpunkt $d = c \delta t/2$ von ihm entfernt war. Der Beobachter bei B sieht dies jedoch anders. Da sich A von ihm entfernt, benötigt das Signal auf dem Hinweg von A nach B weniger Zeit als auf dem Rückweg von B nach A . Würden die beiden Beobachter dennoch versuchen, ihre Uhren auf diese Weise zu synchronisieren, würden sie bei anschließenden Tests feststellen, dass dies nicht funktioniert. Wie wir in Abschnitt 10.4 sehen werden, kommen beide (!) Beobachter zu dem Ergebnis, dass die Uhr am jeweils

anderen Ort langsamer geht. Somit können sie sich nicht auf eine gemeinsame Zeit und daher im Allgemeinen auch nicht auf die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse einigen. Da sich jedoch beide Beobachter in Inertialsystemen befinden, gibt es keine Möglichkeit zu entscheiden, wessen Zeit die „richtige“ ist. Beide sind richtig.

10.3 Herleitung der Transformationsvorschrift

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun die genaue Vorschrift für die Koordinatentransformation herleiten, die die Einstein'schen Postulate erfüllt. Wie wir gesehen haben, können wir nicht davon ausgehen, dass es für relativ zu einander bewegte Koordinatensysteme eine gemeinsame Zeit gibt, so dass wir neben den räumlichen Koordinaten (x, y, z) auch die Zeitkoordinate t transformieren müssen. Wir betrachten daher zwei Inertialsysteme K und K' mit den Koordinaten

$$K : t, x, y, z \quad (10.4)$$

$$K' : t', x', y', z' \quad (10.5)$$

Wir nehmen an, dass sich der räumliche Ursprung von K' , also der Punkt $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$, gegenüber dem räumlichen Ursprung von K , also dem Punkt $(x = 0, y = 0, z = 0)$, mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Dabei können wir die Koordinaten so wählen, dass die beiden räumlichen Ursprünge zur Zeit $t = t' = 0$ übereinstimmen.

Es hat sich als praktisch erwiesen die Orts- und Zeitkoordinaten folgendermaßen zu so genannten *Vierervektoren* zusammenzufassen:

$$(x^\mu) \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x'^\mu) \equiv \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Da K und K' beides Inertialsysteme sind, müssen gleichförmige Bewegungen in K auch in K' als gleichförmige Bewegungen beobachtet werden. Daraus folgt, dass zwischen den gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten ein linearer Zusammenhang bestehen muss, d.h. es muss gelten

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (10.7)$$

mit einer zu bestimmenden von der Relativgeschwindigkeit abhängigen Transformationsmatrix mit den Komponenten $\Lambda^\mu{}_\nu$. (Auf die Bedeutung der Stel-

lung der Indizes – oben oder unten – werden wir in Abschnitt 10.6 genauer zu sprechen kommen.)

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Relativgeschwindigkeit \vec{v} parallel zur x -Achse gerichtet ist und die x' -Achse von K' in die gleiche Richtung zeigt. (Alle anderen Fälle, insbesondere auch die Transformation für beliebige Richtungen von \vec{v} lassen sich aus dem Ergebnis durch zusätzliche räumliche Drehungen der Koordinatensysteme konstruieren.) Aus Symmetriegründen müssen dann die y - und z -Komponenten in beiden Systemen gleich sein, d.h. in der neuen Notation

$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \quad (10.8)$$

Ebenso dürfen x'^0 und x'^1 nicht von x^2 und x^3 abhängen. Die Transformationsmatrix hat daher die Form

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.9)$$

d.h. es gilt

$$x'^0 = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1, \quad (10.10)$$

$$x'^1 = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1. \quad (10.11)$$

Um die verbleibenden Komponenten der Transformationsmatrix zu bestimmen, nutzen wir nun die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen aus, die wir bislang noch nicht verwendet haben.

Dazu nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ am Koordinatenursprung von K , der nach Voraussetzung mit dem Koordinatenursprung von K' zur Zeit $t' = 0$ übereinstimmt, ein Lichtsignal ausgesendet wird. Für die Wellenfront der sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden Kugelwelle gilt dann in K :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (10.12)$$

und entsprechend in K' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (10.13)$$

In der Vierervektor-Notation lassen sich die beiden Gleichungen schreiben als

$$(x^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 = 0 = (x'^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x'^k)^2. \quad (10.14)$$

Zusammen mit Gl. (10.8) ergibt sich daraus

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2. \quad (10.15)$$

Einsetzen von Gl. (10.10) und Gl. (10.11) liefert

$$\begin{aligned} (x^0)^2 - (x^1)^2 = & (x^0)^2 [(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2] \\ & - (x^1)^2 [(\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2] \\ & + 2x^0x^1 [\Lambda^0_0\Lambda^0_1 - \Lambda^1_1\Lambda^1_0] \end{aligned} \quad (10.16)$$

und damit

$$[(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2] = 1, \quad (10.17)$$

$$[(\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2] = 1, \quad (10.18)$$

$$[\Lambda^0_0\Lambda^0_1 - \Lambda^1_1\Lambda^1_0] = 0. \quad (10.19)$$

Diese Gleichungen besitzen eine Lösung der Form

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \cosh \chi, \quad \Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = -\sinh \chi, \quad (10.20)$$

was aus der Identität $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$ folgt.

Da die Transformation von der Relativgeschwindigkeit der beiden Koordinatensysteme abhängt, muss χ eine Funktion von v sein. Um den genauen Zusammenhang zu bestimmen, betrachten wir den Ursprung von K' als Funktion der Zeit. In K' liegt dieser natürlich stets bei

$$x'^1 = 0, \quad (10.21)$$

während er sich in K mit konstanter Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, also

$$x^1 = vt = \frac{v}{c}x^0. \quad (10.22)$$

Mit Gl. (10.11) und Gl. (10.20) folgt daraus

$$0 = \left(\Lambda^1_0 + \frac{v}{c}\Lambda^1_1\right)x^0 = -\left(\sinh \chi - \frac{v}{c}\cosh \chi\right)x^0 \quad (10.23)$$

und somit

$$\tanh \chi = \frac{v}{c} =: \beta. \quad (10.24)$$

χ bezeichnet man auch als *Rapidity*. Mit Hilfe der Beziehung

$$\tanh \chi = \frac{e^\chi - e^{-\chi}}{e^\chi + e^{-\chi}} = \frac{e^{2\chi} - 1}{e^{2\chi} + 1} \quad (10.25)$$

findet man

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (10.26)$$

Weiterhin ergibt sich

$$\cosh \chi = \sqrt{\frac{\cosh^2 \chi}{\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma \quad (10.27)$$

sowie

$$\sinh \chi = \cosh \chi \tanh \chi = \beta \gamma. \quad (10.28)$$

Wir finden also für die Transformationsmatrix Gl. (10.9)

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c} \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.29)$$

Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass wir eine Relativbewegung in x -Richtung angenommen haben. Explizit für die einzelnen Komponenten bedeutet das Ergebnis:

$$t' = \frac{x'^0}{c} = \frac{1}{c} (\gamma x^0 - \beta \gamma x^1) = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (10.30)$$

$$x' = x'^1 = (-\beta \gamma x^0 + \gamma x^1) = \gamma (x - vt) \quad (10.31)$$

$$y' = y \quad (10.32)$$

$$z' = z \quad (10.33)$$

Bemerkungen:

- Die hier untersuchten Transformationen zwischen geradlinig gleichförmig (nicht notwendiger Weise in x -Richtung) gegen einander bewegten Koordinatensystemen mit parallelen Achsen nennt man *Spezielle Lorentz-Transformationen* oder *Lorentz-Boosts*. Zusammen mit räumlichen Drehungen sowie Raum- und Zeitspiegelungen bilden sie die Gruppe der (allgemeinen) Lorentz-Transformationen.
- Wie man aus Gl. (10.27) erkennt, divergiert γ für $\beta \rightarrow 1$, d.h. für $v \rightarrow c$. Daraus folgt, dass nur Relativgeschwindigkeiten $v < c$ möglich sind.

- Für $v \ll c$ ergibt sich $\beta \approx 0$ und damit $\gamma \approx 1$. Es folgt dann

$$t' \approx t \quad \text{und} \quad x' \approx x - vt, \quad (10.34)$$

in Übereinstimmung mit den Koordinatentransformationen der nicht-relativistischen Mechanik (*Galilei-Transformationen*).

- Die inverse Transformationsmatrix ist gegeben durch

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c} \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.35)$$

wie man leicht nachrechnen kann ($(\Lambda^\mu{}_\nu)(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \mathbb{1}$). Es gilt also $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}(v) = (\Lambda^\mu{}_\nu)(-v)$. Allgemein kann man zeigen, dass auch für beliebig gerichtete Relativgeschwindigkeiten $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}(\vec{v}) = (\Lambda^\mu{}_\nu)(-\vec{v})$ gilt. Das ist natürlich auch zu erwarten: Wenn man zwei Lorentz-Boosts mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten, \vec{v} und $-\vec{v}$, hintereinander schaltet, erhält man wieder das ursprüngliche Koordinatensystem.

- Bei der Herleitung der Transformationsvorschrift haben wir von Gl. (10.14), die wir aus der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in K und K' gewonnen haben, nur die Gleichheit der linken mit der rechten Seite ausgenutzt, nicht jedoch, dass beide Seiten verschwinden. Folglich gilt

$$(x^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 = (x'^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x'^k)^2 \quad (10.36)$$

ganz allgemein, nicht nur, wenn beide Seiten gleich null sind.

10.4 Relativität von Zeit- und Längenskalen

Der Einfachheit halber beschränken wir uns weiterhin auf Spezielle Lorentz-Transformationen mit Relativgeschwindigkeiten $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Seien (t_a, x_a, y_a, z_a) und (t_b, x_b, y_b, z_b) die in K gemessenen Koordinaten zweier Ereignisse. Dann gilt gemäß Gl. (10.30) in K' :

$$t'_b - t'_a = \gamma(t_b - t_a - \frac{v}{c^2}(x_b - x_a)). \quad (10.37)$$

Sei nun $t_b = t_a$, d.h. die Ereignisse finden in K gleichzeitig statt. Dann folgt

$$t'_b - t'_a = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_b - x_a), \quad (10.38)$$

was i.A. ungleich null ist, d.h. die Ereignisse finden in K' i.A. nicht gleichzeitig statt („Relativität der Gleichzeitigkeit“).

Sei jetzt $t_b > t_a$, d.h. das Ereignis a findet in K vor dem Ereignis b statt. Ist es möglich, dass in K' das Ereignis a erst nach dem Ereignis b stattfindet? In diesem Fall müsste gelten:

$$t'_b < t'_a \Leftrightarrow t_b - t_a < \frac{v}{c^2} (x_b - x_a) \quad (10.39)$$

Grundsätzlich ist das Vertauschen der zeitlichen Ordnung also möglich. Allerdings muss dann gelten

$$x_b - x_a > \frac{c}{v} c(t_b - t_a) > c(t_b - t_a), \quad (10.40)$$

da $v < c$. Die räumliche Entfernung der beiden Ereignisse ist also in K größer, als die Strecke, die das Licht in der Zeitspanne $t_b - t_a$ zurücklegen kann. Analog kann man über die inverse Transformation zeigen, dass auch in K' die beiden Ereignisse weiter von einander entfernt sind, als das Licht in der Zeit $t'_a - t'_b$ zurücklegen kann. Da sich nichts schneller als das Licht bewegen kann, ist somit keinerlei Informationsaustausch zwischen den beiden Ereignissen möglich: Die Ereignisse sind nicht *kausal verbunden*. Ursache und Wirkung können nicht durch eine Lorentz-Transformation vertauscht werden.

10.4.1 Zeitdilatation

Betrachten wir nun zwei Ereignisse, die in K am gleichen Ort im zeitlichen Abstand Δt stattfinden:

$$t_b - t_a = \Delta t, \quad x_b - x_a = 0. \quad (10.41)$$

Für die Zeitdifferenz in K' gilt dann

$$\Delta t' = t'_b - t'_a = \gamma \Delta t > \Delta t. \quad (10.42)$$

Der Beobachter in K' misst also eine längere Zeit zwischen den beiden Ereignissen als der Beobachter in K . Diesen Effekt bezeichnet man als *Zeitdilatation*. Man könnte daraus schließen, dass die Uhren in K langsamer laufen als in K' . So einfach ist es jedoch nicht. Schließlich sind K und K' nach dem Relativitätsprinzip gleichberechtigte Inertialsysteme, in denen die gleichen Naturgesetze gelten. Insbesondere gibt es nichts, was das eine System

von vornherein gegenüber dem anderen auf eine Weise auszeichnet, dass man sagen könnte, in welchem die Uhren schneller bzw. langsamer gehen. Diese Symmetrie wird jedoch im obigen Beispiel durch die Tatsache gebrochen, dass die beiden beobachteten Ereignisse in K am gleichen Ort stattfinden, in K' dagegen an zwei verschiedenen Orten. Rufen wir noch einmal in Erinnerung, dass man für eine Zeitmessung streng genommen eine im jeweiligen Bezugssystem ruhende Uhr am Ort des Geschehens benötigt, kommt der Beobachter in K mit einer Uhr aus, während K' zwei Uhren benötigt, die er synchronisieren muss. Hätten wir umgekehrt zwei Ereignisse betrachtet, die in K' am gleichen Ort stattfinden, hätte der Beobachter in K eine längere Zeit gemessen als der Beobachter in K' . In diesem Zusammenhang definiert man die *Eigenzeit* $\Delta\tau$ als die Zeitspanne, die von ein und derselben Uhr am gleichen Ort gemessen wird.

Die Zeitdilatation spielt eine wichtige Rolle bei der kosmischen Höhenstrahlung. Durch den Aufprall von Protonen und Kernen auf die Erdatmosphäre entstehen in 10 bis 15 km Höhe zunächst Pionen und als deren Zerfallsprodukte Myonen, die sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit in Richtung Erde bewegen. Myonen sind schwere Verwandte der Elektronen, die in Ruhe mit einer mittleren Lebensdauer von ca. $2 \cdot 10^{-6}$ s in Elektronen und Neutrinos zerfallen. Naiv würde man daher erwarten, dass die Myonen selbst mit Lichtgeschwindigkeit nur eine Strecke von etwa 600 m zurücklegen können. Tatsächlich erreichen die Myonen aber in großer Zahl die Erde und können dort nachgewiesen werden. Der Grund dafür liegt in der hohen Geschwindigkeit und dem damit verbundenen $\gamma \gg 1$. Während die Myonen im mitbewegten System (ihrem *Ruhesystem*) im Mittel nach der Eigenzeit $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s zerfallen, beträgt ihre auf der Erde gemessene Lebensdauer $\gamma\Delta\tau$ und ist damit viel länger.

Ein bekanntes hypothetisches Beispiel zur Zeitdilatation ist das „Zwillingsparadoxon“: Von einem Zwillingpaar begibt sich eine Person auf einen Raumflug, bei dem sie relativ zur Erde nahezu Lichtgeschwindigkeit erreicht. Nach ihrer Rückkehr auf die Erde ist sie weniger gealtert als die zurückgebliebene Person, weil im Raumschiff die Zeit langsamer vergangen ist als auf der Erde. Auch hier spielt die Asymmetrie des Problems wieder eine wichtige Rolle: Die eine Person befand sich die ganze Zeit auf der Erde, also weitgehend in Ruhe, während die andere Person zunächst beschleunigt und am Ende wieder abgebremst werden musste (und zwischendurch mindestens einmal die Richtung wechseln).

10.4.2 Lorentz-Kontraktion

Wir betrachten einen in K ruhenden Stab mit den Endpunkten (x_a, y, z) und (x_b, y, z) und somit der Länge

$$\ell = |x_b - x_a|. \quad (10.43)$$

In K' befinden sich die Endpunkte dann bei $x'_a = \gamma(x_a - vt_a)$ und $x'_b = \gamma(x_b - vt_b)$, d.h. es gilt

$$x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a) - \gamma v(t_b - t_a). \quad (10.44)$$

Offensichtlich hängt das von den Zeiten t_a und t_b ab. Die Länge ist jedoch als der Abstand der Endpunkte zu gleichen Zeiten definiert, d.h. um die Länge des Stabs in K' zu bestimmen, müssen wir t_a und t_b so wählen, dass t'_a und t'_b gleich sind:

$$t'_a = \gamma\left(t_a - \frac{v}{c^2}x_a\right) \stackrel{!}{=} t'_b = \gamma\left(t_b - \frac{v}{c^2}x_b\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma v(t_b - t_a) = \gamma\beta^2(x_b - x_a) \quad (10.45)$$

Einsetzen in Gl. (10.44) liefert dann

$$x'_b - x'_a = \gamma(1 - \beta^2)(x_b - x_a) = \frac{1}{\gamma}(x_b - x_a), \quad (10.46)$$

d.h. wir finden

$$\ell' = \frac{1}{\gamma}\ell. \quad (10.47)$$

Der in K' ruhende Stab ist also in K um den Faktor $\frac{1}{\gamma}$ verkürzt. Diesen Effekt bezeichnet man als *Lorentz-Kontraktion*.

In diesem Zusammenhang kommen wir noch einmal auf die Myonen aus der Höhenstrahlung zurück, die von der Erde aus gesehen von ihrem Entstehungsort bis zum Nachweis im Detektor eine Strecke von 10 bis 15 km zurücklegen, was nur auf Grund der durch die Zeitdilatation um den Faktor γ verlängerten Lebensdauer möglich ist. Im Ruhesystem des Myons stellt sich die Situation ganz anders dar: Da das Myon in Ruhe ist, hat es nur eine Lebensdauer von $2 \cdot 10^{-6}$ s. Dafür bewegt sich der Detektor (zusammen mit der ganzen Erde) mit hoher Geschwindigkeit auf das Myon zu, so dass die anfängliche Entfernung durch die Lorentz-Kontraktion um einen Faktor γ verkürzt ist. Während von der Erde aus betrachtet das Myon also in der Zeit $\gamma\Delta\tau$ die Strecke h durchläuft, durchläuft aus Sicht des Myons der Detektor in der Zeit $\Delta\tau$ die Strecke h/γ . Beide Beobachter können damit konsistent erklären, warum das Myon vor seinem Zerfall im Detektor nachgewiesen werden kann.

10.5 Addition von Geschwindigkeiten

Wir betrachten drei Systeme K , K' und K'' , wobei sich K' relativ zu K mit der Geschwindigkeit v_1 und K'' relativ zu K' mit der Geschwindigkeit v_2 in x -Richtung bewegen. Wie schnell bewegt sich dann K'' relativ zu K ?

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir im Folgenden die y - und z -Komponenten weg. Für die beiden Transformationsmatrizen gilt dann

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)_{K \rightarrow K'} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix} \quad (10.48)$$

und

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)_{K' \rightarrow K''} = \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (10.49)$$

wobei wir wieder die Rapiditäten

$$\tanh \chi_i = \beta_i, \quad i = 1, 2 \quad (10.50)$$

verwendet haben. Die Matrix für die Transformation $K \rightarrow K''$ ergibt sich dann durch „Hintereinanderschalten“ der beiden einzelnen Transformationen:

$$\begin{aligned} (\Lambda^\mu{}_\nu)_{K \rightarrow K''} &= (\Lambda^\mu{}_\nu)_{K' \rightarrow K''} (\Lambda^\mu{}_\nu)_{K \rightarrow K'} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \chi_2 & -\sinh \chi_2 \\ -\sinh \chi_2 & \cosh \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \chi_1 & -\sinh \chi_1 \\ -\sinh \chi_1 & \cosh \chi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\chi_1 + \chi_2) & -\sinh(\chi_1 + \chi_2) \\ -\sinh(\chi_1 + \chi_2) & \cosh(\chi_1 + \chi_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.51)$$

da

$$\cosh(\chi_1 + \chi_2) = \cosh \chi_1 \cosh \chi_2 + \sinh \chi_1 \sinh \chi_2 \quad (10.52)$$

und

$$\sinh(\chi_1 + \chi_2) = \sinh \chi_1 \cosh \chi_2 + \cosh \chi_1 \sinh \chi_2. \quad (10.53)$$

Wir finden also, dass von K aus gesehen K'' die Rapidität

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 \quad (10.54)$$

hat, d.h. die Rapiditäten sind unter parallelen Lorentz-Transformationen additiv!

Das gilt jedoch nicht für die Geschwindigkeiten. Mit Hilfe von Gl. (10.25) und Gl. (10.26) kann man zeigen, dass

$$\beta = \tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (10.55)$$

und damit

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (10.56)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall, $\frac{v_1 v_2}{c^2} \ll 1$ folgt daraus

$$v \approx v_1 + v_2, \quad (10.57)$$

wie man es erwarten würde. Im allgemeinen gilt dies jedoch nicht. Insbesondere verhindert der Nenner, dass v größer werden kann als c , selbst wenn v_1 und v_2 schon nahe bei c sind.

$$\text{Beispiel: } \beta_1 = \beta_2 = 0,9 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1,8}{1,81} = 0,9945 \quad (10.58)$$

Im Extremfall $\beta_2 = 1$ erhält man $\beta = 1$, d.h. wenn sich K'' gegenüber K' mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, dann bewegt es sich auch gegenüber K mit Lichtgeschwindigkeit, in Übereinstimmung mit den Einstein'schen Postulaten.

10.6 Lorentz-Skalare, -Vektoren und -Tensoren

Im Zusammenhang mit dem starren Körper haben wir bereits Skalare, Vektoren und Tensoren über ihre Transformationseigenschaften unter Rotationen kennen gelernt. Analog definiert man auch Skalare, Vektoren und Tensoren über ihr Verhalten unter Lorentz-Transformationen. Da dabei Raum- und Zeitkoordinaten mit einander in Verbindung gesetzt werden, haben wir es nun mit vierdimensionalen Vektoren, 4×4 -Matrizen etc. zu tun.

Wir haben bereits den Vierervektor

$$(x^\mu) \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (10.59)$$

kennen gelernt und gefunden, dass

$$(x^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 \equiv (x^0)^2 - \vec{x}^2 \quad (10.60)$$

invariant unter Lorentz-Transformationen ist, s. Gl. (10.36). Hier ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (10.61)$$

der „normale“ räumliche Ortsvektor und $\vec{x}^2 = \sum_{k=1}^3 (x^k)^2$ das zugehörige Längenquadrat, von dem wir gesehen haben, dass es unter räumlichen Drehungen invariant ist.

Um eine ähnlich kompakte Notation für Vierervektoren zu erhalten, definiert man

$$(x_\mu) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{x} \end{pmatrix}. \quad (10.62)$$

Dabei bezeichnet man (x^μ) als *kontravarianten* und (x_μ) als *kovarianten* Vierervektor.⁵³

Es gilt dann, dass

$$x^2 \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \quad (10.63)$$

invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

Um Schreibarbeit zu sparen, verwendet man in diesem Zusammenhang häufig die *Einstein'sche Summenkonvention*, wonach über gleiche Indizes oben und unten automatisch summiert wird. Weiterhin ist es üblich, über griechische Indizes von 0 bis 3 und über lateinische Indizes von 1 bis 3 zu summieren, also z.B.

$$x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu, \quad x^k x_k \equiv \sum_{k=1}^3 x^k x_k. \quad (10.64)$$

Der Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vierervektoren wird über den *metrischen Tensor*

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.65)$$

hergestellt. Es gilt dann

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \left(\equiv \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \right), \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \left(\equiv \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu \right). \quad (10.66)$$

⁵³ Wir verwenden hier Klammern, um die Vierervektoren (x^μ) und (x_μ) von den jeweiligen μ -ten Komponenten x^μ und x_μ zu unterscheiden.

Der metrische Tensor kann auch auf sich selbst angewendet werden, um seine Indizes herauf oder herunter zu ziehen, z.B.

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}, \quad g_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}. \quad (10.67)$$

Daraus ergibt sich

$$(g^{\mu}{}_{\nu}) = (g_{\mu}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.68)$$

In Anlehnung an das Kronecker-Symbol δ_{ij} schreibt man in diesem Fall auch häufig $g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \equiv \delta_{\nu}^{\mu}$ bzw. $g_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} \equiv \delta_{\mu}^{\nu}$.

Wir kommen nun noch einmal auf die Lorentz-Transformationen zurück. Mit der Einstein'schen Summenkonvention lautet Gl. (10.7)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}. \quad (10.69)$$

Analog schreiben wir für die kovarianten Komponenten

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu}. \quad (10.70)$$

Andererseits gilt

$$x'_{\mu} = g_{\mu\alpha} x'^{\alpha} = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} g^{\beta\nu} x_{\nu}. \quad (10.71)$$

Daraus ergibt sich

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} g^{\beta\nu}, \quad (10.72)$$

d.h. die Regeln für das Herauf- und Herunterziehen der Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors gelten auch für die Matrix $(\Lambda_{\mu}{}^{\nu})$.

Aus der Lorentz-Invarianz von $x_{\mu}x^{\mu}$, Gl. (10.63) folgt dann

$$x'_{\mu}x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} \stackrel{!}{=} x_{\nu}x^{\nu} = x_{\nu} g^{\nu\lambda} x^{\lambda} \quad (10.73)$$

und damit

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} = g^{\nu\lambda}. \quad (10.74)$$

Daraus kann man die Regeln für die Rücktransformation herleiten:

$$x^{\nu} = g^{\nu\lambda} x^{\lambda} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu}. \quad (10.75)$$

Da $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ und x'^{μ} keine Matrizen bzw. Vektoren, sondern nur deren Komponenten bezeichnen, können wir sie vertauschen, um ein einprägsameres Ergebnis zu erhalten:

$$x^{\nu} = x'^{\mu} \Lambda_{\mu}{}^{\nu}. \quad (10.76)$$

Dies kann man sich als die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix von rechts vorstellen, während z.B. Gl. (10.69) Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Matrix von links entspricht. Für die kovarianten Komponenten ergibt sich entsprechend

$$x_\nu = x'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (10.77)$$

Bislang haben wir nur vom Vierervektor (x^μ), dessen kovarianter Entsprechung (x_μ) und deren Lorentz-Transformationen gesprochen. Allgemein kann man nun auch andere physikalische Größen nach ihrem Verhalten unter Lorentz-Transformationen klassifizieren.

- *Lorentz-Skalare* sind Größen, die unter Lorentz-Transformationen invariant bleiben.
- Kontra- bzw. kovariante *Vierervektoren* sind alle vierkomponentigen Objekte (a^μ) bzw. (a_μ), die sich unter Lorentz-Transformationen genauso verhalten wie (x^μ) bzw. (x_μ), also

$$\boxed{\begin{aligned} a'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu & \Leftrightarrow & & a'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu \\ a^\nu &= a'^\mu \Lambda_\mu{}^\nu & \Leftrightarrow & & a_\nu &= a'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned}} \quad (10.78)$$

mit den gleichen Matrizen ($\Lambda^\mu{}_\nu$) etc., die auch die Transformationen der Raum- und Zeit-Koordinaten beschreiben.

Das *Skalarprodukt* zweier Vierervektoren ist definiert als

$$a \cdot b := a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu. \quad (10.79)$$

Skalarprodukte sind invariant unter Lorentz-Transformationen (und damit Lorentz-Skalare), d.h.

$$a' \cdot b' = a \cdot b. \quad (10.80)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Invarianz von $x_\mu x^\mu$ und der Tatsache dass sich Vierervektoren so transformieren wie x_μ bzw. x^μ . Insbesondere sind also die Quadrate von Vierervektoren, $a^2 := a^\mu a_\mu$, invariante Größen. In diesem Zusammenhang unterscheidet man drei Klassen von Vierervektoren. Man sagt, ein Vierervektor (a^μ) ist

- *zeitartig*, wenn $a^2 \equiv a^\mu a_\mu > 0$,
- *raumartig*, wenn $a^2 \equiv a^\mu a_\mu < 0$,

– *lichtartig*, wenn $a^2 \equiv a^\mu a_\mu = 0$.

Die Bedeutung dieser drei Kategorien wird deutlich, wenn man sie auf die Differenz $(\Delta x^\mu) = (x'^\mu) - (x^\mu)$ zweier Raumzeitvektoren anwendet. Hier gilt $(\Delta x)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2$, d.h. für lichtartige Differenzen entspricht der räumliche Abstand $|\Delta \vec{x}|$ zwischen den beiden Ereignissen genau der Strecke, die das Licht in der Zeit Δt zurücklegen kann. Für zeitartige Differenzen ist der räumliche Abstand dagegen geringer, während für raumartige Differenzen der räumliche Abstand zwischen den beiden Ereignissen größer ist als die Strecke $c\Delta t$, die das Licht in der Zeit Δt zurücklegen kann. Im letzteren Fall sind die beiden Ereignisse also nicht kausal verbunden (vgl. Abschnitt 10.4).

Ein wichtiger Vierervektor ist der *Vierergradient*, dessen Komponenten die Ableitungen nach x^μ oder x_μ bilden. Mit Hilfe der Kettenregel finden wir

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \stackrel{(10.76)}{=} \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (10.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \stackrel{(10.77)}{=} \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (10.82)$$

Vergleich mit Gl. (10.78) zeigt dass sich $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ wie ein kovarianter Vierervektor a_μ transformiert, $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ wie ein kontravarianter Vierervektor a^μ . Man schreibt daher auch

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu. \quad (10.83)$$

Aus den Gleichungen (10.59) und (10.62) folgt andererseits für den gewöhnlichen dreidimensionalen Gradienten:

$$\nabla^k = \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (10.84)$$

Daraus ergibt sich

$$(\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (10.85)$$

$$(\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}. \quad (10.86)$$

Anders als in Gl. (10.59) und (10.62) tritt hier das Minuszeichen vor den räumlichen Komponenten also im kontravarianten Vektor auf. Für das Quadrat des Vierergradienten ergibt sich dann

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \equiv \square, \quad (10.87)$$

also der d'Alembert-Operator, den wir in Gl. (9.36) im Zusammenhang mit den elektromagnetischen Wellen eingeführt haben. \square ist also ein Lorentz-invarianter Operator.

- Tensoren 2. Stufe sind 4×4 -Matrizen ($A^{\mu\nu}$), deren Komponenten sich transformieren wie $x^\mu x^\nu$:

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta}. \quad (10.88)$$

Analoges gilt für $A_{\mu\nu}$, A^μ_ν und A_μ^ν .

Insbesondere sind auch (Λ^μ_ν) und $(g^{\mu\nu})$ Tensoren 2. Stufe, wobei sich allerdings $(g^{\mu\nu})$ unter Lorentz-Transformationen nicht ändert:

$$g'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^{\nu\alpha} \stackrel{(10.74)}{=} g^{\mu\nu} \quad (10.89)$$

- Allgemein definiert man *Tensoren n-ter Stufe* als Objekte mit n Indizes, die sich folgendermaßen transformieren:

$$A'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} A^{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (10.90)$$

Entsprechend definiert man (mit $x \equiv (x^\mu)$)

- *Skalarfelder:* $S'(x') = S(x)$
- *Vektorfelder:* $V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x)$
- *Tensorfelder:* $T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}(x)$
- ...

Den vierdimensionalen Raum, in dem diese Felder „leben“, bezeichnet man als *Raumzeit* oder, wenn man die mathematische Struktur mit dem metrischen Tensor $(g^{\mu\nu})$ hervorheben möchte, als *Minkowski-Raum*.

Kapitel 11

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

11.1 Lorentz-Transformation von Ladungs- und Stromdichten

In einem infinitesimalen ruhenden Quader mit Volumen $dV = dx dy dz$ befinde sich die Ladung dQ . Die Ladung befinde sich ebenfalls in Ruhe, so dass kein Strom fließt. Für die Ladungs- und die Stromdichte am Ort des Quaders gilt dann:

$$\rho = \frac{dQ}{dV}, \quad \vec{j} = \vec{0}. \quad (11.1)$$

Von einem Koordinatensystem K' aus betrachtet, das sich relativ zu dem Volumen mit Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, ist das Volumen Lorentzkontrahiert, d.h. es gilt

$$dx' = \frac{1}{\gamma} dx, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz \quad \Rightarrow \quad dV' = \frac{1}{\gamma} dV \quad (11.2)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ wie zuvor. Da sich die im Volumen enthaltene Ladung nicht ändert, ergibt sich für die Ladungsdichte in K'

$$\rho' = \frac{dQ}{dV'} = \gamma \frac{dQ}{dV} = \gamma \rho, \quad (11.3)$$

d.h. die Ladungsdichte ist um den Faktor γ größer als im Ruhesystem des Quaders. Gleichzeitig bewegt sich in K' die Ladung mit der Geschwindigkeit v in negative x Richtung, d.h. es fließt ein Strom

$$j'_x = -\frac{dQ}{dy' dz' dt'}, \quad j'_y = j'_z = 0. \quad (11.4)$$

Dabei ist dt' die Zeit, die die im Volumen dV' enthaltene Ladung (also dQ) benötigt, durch die Fläche $dy' dz'$ hindurch zu strömen:

$$dt' = \frac{dx'}{v}. \quad (11.5)$$

Es gilt also

$$j'_x = -\frac{v dQ}{dx' dy' dz'} = -v\rho' = -\gamma v\rho. \quad (11.6)$$

Dies motiviert, Ladungs- und Stromdichte zu einem *Viererstrom*

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

zusammenzufassen, wobei wir analog zum Vierervektor (x^μ) in der Nullkomponente einen Faktor c eingeführt haben, damit j^0 und j^k die gleichen Dimensionen besitzen. Es stellt sich dann heraus, dass (j^μ) ebenfalls ein Vierervektor ist, sich also genauso transformiert wie (x^μ) . Betrachten wir dazu unser obiges Beispiel. Im ursprünglichen Koordinatensystem gilt dann $j^0 = c\rho$ und $\vec{j} = \vec{0}$, also $j^k = 0$. Wenn (j^μ) ein Vierervektor ist, sollte für den Viererstrom in K'

$$j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu \quad (11.8)$$

gelten, wobei $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ in Gl. (10.29) gegeben ist. Explizit findet man dann

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1) = \gamma c\rho \quad \Rightarrow \quad \rho' = \gamma\rho \quad (11.9)$$

und

$$j'_x \equiv j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0) = -\gamma\beta c\rho = -\gamma v\rho, \quad (11.10)$$

in Übereinstimmung mit Gln. (11.3) und (11.6).

Auch die Kontinuitätsgleichung (7.10) lässt sich mit Hilfe des Viererstroms ausdrücken:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} \underbrace{c\rho}_{j^0} + \partial_k j^k = \partial_\mu j^\mu \quad (11.11)$$

Wir erhalten also das kompakte Ergebnis

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad (11.12)$$

Man sagt dazu auch, dass (j^μ) ein *erhaltener Viererstrom* ist. Da $\partial_\mu j^\mu$ das Skalarprodukt zweier Vierervektoren und damit ein Lorentz-Skalar ist, ist dieses Ergebnis Lorentz-invariant, gilt also in allen Inertialsystemen. Wie

wir schon früher gesehen haben, hängt die Kontinuitätsgleichung mit der Ladungserhaltung zusammen. Ihre Lorentz-Invarianz ist daher ein Ausdruck der Tatsache, dass Ladungen durch den Wechsel des Koordinatensystems weder erzeugt noch vernichtet werden können. In der Tat haben wir das ja auch bei der Herleitung von Gl. (11.3) und Gl. (11.6) verwendet.

Analog zur Viererstromdichte in können wir auch die in Abschnitt 9.5 eingeführte Energiedichte w des elektromagnetischen Feldes und die zugehörige Energiestromdichte \vec{S} (Poynting-Vektor) zur *Viererenergiestromdichte*

$$(S^\mu) = \begin{pmatrix} cw \\ \vec{S} \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

zusammenfassen. Aus Gl. (9.110) folgt dann für die ebene Welle $(S^\mu) = cw \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{k}}{k} \end{pmatrix}$ und damit $S^\mu S_\mu = c^2 w^2 (1 - 1) = 0$, d.h. (S^μ) ist ein lichtartiger Vierervektor.

11.2 Der elektromagnetische Feldstärketensor

Aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen hatten wir in Abschnitt 9.4 gefunden, dass die elektromagnetischen Potenziale in Lorenz-Eichung folgende Wellengleichungen erfüllen (hier und im Folgenden beschränken wir uns wieder auf die Gleichungen im Vakuum):

$$\square \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = c^2 \mu_0 \rho = c \mu_0 j^0 \quad (11.14)$$

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (11.15)$$

Das legt nahe, das skalare Potenzial ϕ und das Vektorpotenzial \vec{A} zu einem *Viererpotenzial*

$$(A^\mu) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

zusammenzufassen, so dass die beiden obigen Gleichungen in der Form

$$\boxed{\square A^\mu = \mu_0 j^\mu} \quad (11.17)$$

geschrieben werden können. Da (j^μ) ein Vierervektor und $\square = \partial_\nu \partial^\nu$ ein Lorentz-Skalar ist (und die Konstante μ_0 natürlich auch), muss (A^μ) ebenfalls ein Vierervektor sein, damit sich beide Seiten der Gleichung gleich transformieren.

In diesem Zusammenhang möchten wir noch einmal betonen, dass die Gleichungen (11.14) und (11.15) und damit (11.17) nur in Lorenz-Eichung gelten. Die in Abschnitt 9.4 angegebene Definition dieser Eichung („Eichbedingung“) lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Viererpotenzials ausdrücken:

$$0 = \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\partial_0 A^0} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\partial_k A^k} = \partial_\mu A^\mu, \quad (11.18)$$

d.h. die Eichbedingung ist Lorentz-invariant. (Für die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ist das nicht der Fall.)

Wir wollen nun aus den Potenzialen die elektrischen und magnetischen Felder berechnen. Für das \vec{E} -Feld finden wir (s.Gl. (9.72))

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} = -c \vec{\nabla} A^0 - c \frac{\partial}{\partial x^0} \vec{A} \quad (11.19)$$

und somit für die k -te Komponente

$$E^k = -c \partial_k A^0 - c \partial_0 A^k = c(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k). \quad (11.20)$$

Für das \vec{B} -Feld ergibt sich andererseits aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (Gl. (9.69))

$$B^1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2), \quad (11.21)$$

$$B^2 = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3), \quad (11.22)$$

$$B^3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1). \quad (11.23)$$

Wie man sieht, hängen die Komponenten beider Felder auf recht ähnliche Art mit räumlichen oder zeitlichen Ableitungen des Viererpotenzials zusammen. Insbesondere lassen sie sich alle mit Komponenten des *elektrischen Feldstärketensors*

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (11.24)$$

identifizieren. Explizit folgt aus den obigen Gleichungen

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^1 & -\frac{1}{c}E^2 & -\frac{1}{c}E^3 \\ \frac{1}{c}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{1}{c}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{1}{c}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.25)$$

Aus der Definition ergeben sich außerdem folgende Eigenschaften:

- $(F^{\mu\nu})$ ist eine antisymmetrische 4×4 -Matrix: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Es gibt daher sechs unabhängige Komponenten, die den Komponenten von \vec{E} und \vec{B} entsprechen (s.o.).

- $(F^{\mu\nu})$ ist ein Lorentz-Tensor 2. Stufe, d.h. unter Lorentz-Transformationen gilt

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (11.26)$$

Insbesondere sind die Komponenten der \vec{E} - und \vec{B} -Felder nicht Lorentz-invariant oder Komponenten separater Vierervektoren, sondern transformieren sich teilweise in einander um. Qualitativ haben wir das schon bei der Motivation des Induktionsgesetzes in Abschnitt 9.3 gesehen, bei dem der mit der Leiterschleife mitbewegte Beobachter ein elektrisches Feld „sieht“, das im ursprünglichen Koordinatensystem nicht vorhanden war. Allerdings hatten wir dort Galilei-Invarianz der physikalischen Gesetze vorausgesetzt, statt Lorentz-Invarianz, und sind von einer nicht ganz richtigen Transformationsvorschrift des \vec{B} -Feldes ausgegangen.

- Der Feldstärketensor ist invariant unter Eichtransformationen. Das folgt direkt aus der Tatsache, dass \vec{E} und \vec{B} eichinvariant sind.

Wir können dies aber auch direkt mit Hilfe des Viererpotenzials zeigen. Aus den in Gln. (9.73) und (9.74) gegebenen Transformationsvorschriften für \vec{A} und ϕ folgt zunächst

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad \Rightarrow \quad A^k \rightarrow A^k - \partial^k\chi, \quad (11.27)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi} \quad \Rightarrow \quad A^0 \rightarrow A^0 - \partial^0\chi, \quad (11.28)$$

insgesamt also

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu\chi. \quad (11.29)$$

Daraus ergibt sich für die Komponenten des Feldstärketensors

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow \partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu\chi) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu\chi) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \underbrace{\partial^\mu\partial^\nu\chi + \partial^\nu\partial^\mu\chi}_{=0} = F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (11.30)$$

d.h. $F^{\mu\nu}$ ist wie erwartet eichinvariant.

11.3 Lorentz-kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

Als nächstes berechnen wir die Viererdivergenz des Feldstärketensors:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu. \quad (11.31)$$

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, gilt in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ und $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$, s. Gln. (11.18) und (11.17). Wir finden also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (11.32)$$

Dies sind vier Gleichungen, je eine für $\nu = 0, 1, 2, 3$. Gemäß unserer Herleitung gelten sie zunächst einmal in Lorenz-Eichung. Da jedoch $F^{\mu\nu}$ eichinvariant ist, gelten sie ganz allgemein.

Die Bedeutung der Gleichungen wird klar, wenn man für $F^{\mu\nu}$ den expliziten Ausdruck (11.25) einsetzt. Das liefert (Übung):

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (11.33)$$

$$\partial_\mu F^{\mu k} = \mu_0 j^k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \quad (11.34)$$

Somit beinhaltet Gl. (11.32) beide inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Um die homogenen Maxwell-Gleichungen auf ähnliche Weise formulieren zu können, definieren wir den *dualen Feldstärketensor*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (11.35)$$

mit dem vierdimensionalen *Levi-Civita-Tensor*

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & , \text{ falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1 & , \quad \dots \quad \text{ungerade} \quad \dots, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.36)$$

Insbesondere ist $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch, d.h. die Vertauschung zweier beliebiger Indizes liefert immer einen Vorzeichenwechsel.⁵⁴

Setzt man Gl. (11.25) in Gl. (11.35) ein, ergibt sich

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & \frac{1}{c} E^3 & -\frac{1}{c} E^2 \\ B^2 & -\frac{1}{c} E^3 & 0 & \frac{1}{c} E^1 \\ B^3 & \frac{1}{c} E^2 & -\frac{1}{c} E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.37)$$

d.h. $(\tilde{F}^{\mu\nu})$ ergibt sich aus $(F^{\mu\nu})$ durch die Ersetzungen $\frac{1}{c} \vec{E} \rightarrow \vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c} \vec{E}$.

⁵⁴Mit Hilfe des metrischen Tensors kann man die Indizes auch nach unten ziehen. Es folgt, dass $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Leider gibt es in der Literatur unterschiedliche Konventionen. Während wir $\epsilon^{0123} = 1$ setzen, verwenden manche Autoren $\epsilon_{0123} = 1$ und damit $\epsilon^{0123} = -1$.

Für die Viererdivergenz findet man zunächst

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma, \quad (11.38)$$

wobei wir im zweiten Term die Summationsindizes ρ und σ in einander umbenannt und $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ verwendet haben. Der Ausdruck auf der rechten Seite verschwindet aber, weil $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch und $\partial_\mu \partial_\rho$ symmetrisch in den Summationsindizes μ und ρ ist. Dies sieht man so:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho + \partial_\rho \partial_\mu) A_\sigma = \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \epsilon^{\rho\nu\mu\sigma}) \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0, \quad (11.39)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Summationsindizes μ und ρ im zweiten Term in einander umbenannt und im letzten Schritt verwendet haben, dass der Levi-Civita-Tensor total antisymmetrisch ist. Insgesamt finden wir also

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (11.40)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ergibt sich dann durch Vergleich mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen und den Ersetzungen $\frac{1}{c} \vec{E} \rightarrow \vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c} \vec{E}$ auf der linken Seite sowie $\rho \rightarrow 0$ und $\vec{j} \rightarrow \vec{0}$ auf der rechten Seite:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0} \quad (11.42)$$

Gl. (11.40) beinhaltet somit beide homogenen Maxwell-Gleichungen. Insgesamt lassen sich die vier Maxwell-Gleichungen also durch zwei Lorentzkovariante Gleichungen für den Feldstärketensor und den dualen Feldstärketensor ausdrücken:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.} \quad (11.43)$$

Kapitel 12

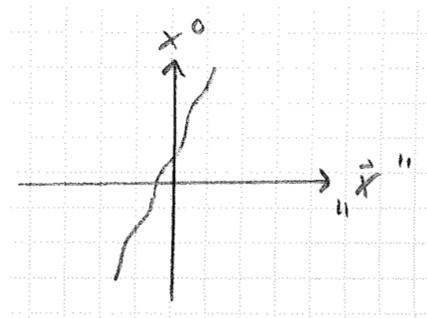
Relativistische Mechanik

Wir wollen nun die Gesetze der Mechanik so umformulieren, dass sie im Einklang mit den Einstein'schen Axiomen stehen, insbesondere also forminvariant unter Lorentz-Transformationen bleiben. Konkret bedeutet das, dass sich die Grundgleichungen durch Lorentz-Skalare, -Vektoren oder -Tensoren ausdrücken lassen. Da die Newton'schen Gesetze Galilei-invariant, jedoch nicht Lorentz-invariant sind, ist klar, dass wir die Gesetze – anders als die Maxwell-Gleichungen – nicht nur umschreiben, sondern wirklich abändern müssen. Im Grenzfall $v \ll c$ sollten sich aber wieder die bekannten Ausdrücke ergeben.

12.1 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Bahn eines Teilchens durch den vierdimensionalen Minkowski-Raum wird in einem gegebenen Inertialsystem durch eine *Weltlinie*

$$(x^\mu(\lambda)) = \begin{pmatrix} x^0(\lambda) \\ \vec{x}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct(\lambda) \\ \vec{x}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (12.1)$$



beschrieben, wobei λ ein zunächst beliebiger Parameter ist.

Eine infinitesimale Verschiebung der Raumzeit entlang der Weltlinie ent-

spricht dann dem Differenzial

$$(dx^\mu) = \begin{pmatrix} dx^0 \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda. \quad (12.2)$$

Dann ist

$$dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 \equiv c^2(d\tau)^2 \quad (12.3)$$

Lorentz-invariant und damit auch $d\tau$.

Die physikalische Bedeutung von $d\tau$ wird deutlich, wenn wir in ein Koordinatensystem gehen, in dem sich das Teilchen zum betrachteten Zeitpunkt t' gerade in Ruhe befindet:

$$(dx'^\mu) = \begin{pmatrix} c dt' \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

Daraus folgt

$$c^2(d\tau)^2 = dx'^\mu dx'_\mu = c^2(dt')^2, \quad (12.5)$$

also $d\tau = dt'$, d.h. $d\tau$ entspricht gerade dem Zeitintervall im Ruhesystem des Teilchens oder, anders ausgedrückt, auf einer mitgeführten Uhr. Dieses Zeitintervall bezeichnet man auch als *Eigenzeit-Intervall* (vgl. Abschnitt 10.4.1). In einem Koordinatensystem, in dem sich das Teilchen mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegt (das sich also relativ zum Teilchen mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}$ bewegt) gilt dann auf Grund der Zeitdilatation

$$dt = \gamma d\tau. \quad (12.6)$$

Da $d\tau$ ein Lorentz-Skalar ist, bietet es sich an, die Weltlinie mit der Eigenzeit zu parametrisieren, also $(x^\mu(\lambda)) = (x^\mu(\tau))$. Dann ist die *Vierergeschwindigkeit*

$$(u^\mu(\tau)) := \begin{pmatrix} dx^\mu \\ d\tau \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

ein (kontravarianter) Vierervektor. Konkret findet man für ein Teilchen, das sich mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegt,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dt}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad (12.8)$$

und damit

$$(u^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dt} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (12.9)$$

Für das Längenquadrat ergibt sich dann

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \frac{1}{1 - \beta^2} c^2 (1 - \beta^2) = c^2. \quad (12.10)$$

12.2 Das relativistische Trägheitsgesetz

Wir kommen nun auf das Problem zurück, die Gesetze der Mechanik so zu formulieren, dass sie im Einklang mit den Einstein'schen Axiomen stehen. Da sie im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Newton'schen Gesetze übergehen sollten, wählen wir als Startpunkt das zweite Newton'sche Gesetz,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (12.11)$$

auch wenn wir erwarten, dass es modifiziert werden muss. Mit

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \quad (12.12)$$

und

$$\vec{v} = \frac{1}{\gamma} \vec{u} \quad (12.13)$$

ergibt sich daraus

$$\frac{d}{d\tau} \left(m \frac{1}{\gamma} \vec{u} \right) = \gamma \vec{F}. \quad (12.14)$$

Da uns bereits eine relativistische Formulierung der Elektrodynamik gelungen ist, betrachten wir konkret die Kraft auf ein Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld,

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right). \quad (12.15)$$

Für die k -te Komponente der Kraft gilt damit

$$F^k = q \left(E^k + (\vec{v} \times \vec{B})^k \right) = q \left(E^k + \epsilon^{ijk} v^i B^j \right) \quad (12.16)$$

mit dem dreidimensionalen Levi-Civita-Tensor (dem üblichen ϵ -Tensor)

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & , \text{ falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1 & , \quad \dots \quad \text{ungerade} \quad \dots, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.17)$$

vgl. Gl. (11.36). Obwohl es sich bei \vec{F} , \vec{v} , \vec{E} und \vec{B} um die gewöhnlichen dreidimensionalen Vektoren handelt, haben wir die Komponenten hier (wie auch schon in Kapitel 11) mit hochgestellten Indizes gekennzeichnet, um im Folgenden beim Übergang zu Vierervektoren und -tensoren Unklarheiten in den Vorzeichen zu vermeiden. In dem Zusammenhang haben wir außerdem die Einstein'sche Summenregel auf den Fall verallgemeinert, dass auch dann

über gleiche Indizes summiert wird, wenn sie beide oben stehen. In Gl. (12.16) wird also über i und j summiert.

Als nächstes wollen wir die elektrischen und magnetischen Felder mit Hilfe des Feldstärketensors ausdrücken. Aus den Gleichungen (11.20) - (11.24) folgt

$$E^k = c F^{k0} \quad (12.18)$$

sowie

$$B^1 = -F^{23}, \quad B^2 = -F^{31}, \quad B^3 = -F^{12}, \quad (12.19)$$

was man in der Form

$$B^j = -\frac{1}{2} \epsilon^{mnj} F^{mn} \quad (12.20)$$

schreiben kann. Daraus wiederum folgt

$$\epsilon^{ijk} v^i B^j = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon^{ikj} \epsilon^{mnj}}_{\delta^{im} \delta^{kn} - \delta^{in} \delta^{km}} v^i F^{mn} = \frac{1}{2} v^i (F^{ik} - F^{ki}) = -F^{ki} v^i. \quad (12.21)$$

Wir finden also für die k -te Komponente der Kraft

$$F^k = q (F^{k0} c - F^{ki} v^i) \quad (12.22)$$

und damit

$$\begin{aligned} \gamma F^k &= q (F^{k0} \gamma c - F^{ki} \gamma v^i) \\ &= q (F^{k0} u^0 - F^{ki} u^i) = q (F^{k0} u_0 + F^{ki} u_i) = q F^{k\nu} u_\nu. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Aus dem zweiten Newton'schen Gesetz ergibt sich also

$$\frac{d}{d\tau} \left(m \frac{1}{\gamma} u^k \right) = K^k, \quad (12.24)$$

wobei K^k die k -te „räumliche“ (d.h. $k \in \{1, 2, 3\}$) Komponente des Vierervektors

$$K^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad (12.25)$$

ist. Dagegen ist die linke Seite von Gl. (12.24) keine Vierervektorkomponente, wenn wir davon ausgehen, dass die Masse m ein Lorentz-Skalar ist. Da τ ebenfalls ein Lorentz-Skalar und (u^μ) ein Vierervektor ist, hätte der Ausdruck ohne den Faktor $1/\gamma$ bereits das richtige Transformationsverhalten, das jedoch durch diesen Faktor zerstört wird. Das legt nahe, dass wir für die korrekte relativistische Beschreibung, für die sich natürlich beide Seiten der Gleichung auf die gleiche Weise transformieren müssen, den Faktor $1/\gamma$ auf

der linke Seite weglassen müssen. Außerdem sollte es dann auch eine entsprechende Gleichung für die 0-Komponenten der Vierervektoren geben. Die Gleichung lautet damit

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = K^\mu}, \quad (12.26)$$

wobei μ nun, wie üblich, Werte von 0 bis 3 annehmen kann. Auf die Bedeutung der 0-Komponente werden wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen.

Eine äquivalente Formulierung besteht darin, Gl. (12.24) beizubehalten (mit einer zusätzlichen 0-Komponente), jedoch eine geschwindigkeitsabhängige Masse $m(v) = \gamma m(0)$ anzunehmen. Dabei bezeichnet man $m(0)$ als *Ruhemasse*. Diese Sichtweise wurde zu Beginn auch von Einstein selbst vertreten, ist aber inzwischen unüblich. Im Folgenden verwenden wir daher Gl. (12.26) und behandeln die Masse als Lorentz-Skalar, den wir mit der Ruhemasse identifizieren, $m \equiv m(0)$.

Wir können nun zu Gl. (12.14) zurückgehen, dort ebenfalls den Faktor $1/\gamma$ weglassen und dann τ und \vec{u} wieder durch die ursprüngliche Zeitkoordinate t bzw. die Geschwindigkeit \vec{v} ausdrücken. Dies liefert das modifizierte zweite Newton'sche Gesetz⁵⁵

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m \gamma \vec{v}) = \vec{F}}, \quad (12.27)$$

das sich von der ursprünglichen Form durch einen zusätzlichen Faktor γ auf der linken Seite (das weggelassene $1/\gamma$) unterscheidet. Da γ für kleine Geschwindigkeiten gegen 1 geht, besitzt diese Gleichung den korrekten nichtrelativistischen Grenzfall.

12.3 Impuls und Energie

Gl. (12.27) können wir in der gewohnten Form

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \quad (12.28)$$

schreiben, wenn wir den *relativistischen Impuls* mit

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}} \quad (12.29)$$

⁵⁵In der veralteten Notation mit der geschwindigkeitsabhängigen Masse besitzt diese Gleichung die Form $\frac{d}{dt}(m(v) \vec{v}) = \vec{F}$, d.h. man muss lediglich die Masse m in Gl. (12.11) durch $m(v) = \gamma m$ ersetzen. Wichtig ist, dass die Zeitableitung auch auf den Massenterm wirkt, d.h. $\vec{F} = m(v) \vec{a}$ ist i.A. nicht richtig.

identifizieren. Darüber hinaus liefert Gl. (12.26) noch eine Gleichung für die Nullkomponente,

$$\frac{d}{d\tau}(mu^0) = K^0, \quad (12.30)$$

die wir analog zu Gl. (12.27) auf die Form

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c) = \frac{1}{\gamma} K^0 \quad (12.31)$$

bringen können. Um diese Gleichung zu interpretieren, werten wir die rechte Seite wieder für den elektromagnetischen Fall aus:

$$\frac{1}{\gamma} K^0 = \frac{1}{\gamma} q F^{0\nu} u_\nu = -\frac{1}{\gamma} q \frac{1}{c} E^k u_k = \frac{1}{\gamma} q \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{u} = q \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (12.32)$$

Multipliziert mit c finden wir also

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = q \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt} \quad (12.33)$$

mit der Leistung des elektromagnetischen Feldes an der Ladung $\frac{dW}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$, s. Gl. (9.91). Weglassen der Zeitableitungen auf beiden Seiten liefert dann (bis auf eine Integrationskonstante, die wir auf null setzen können) für die *relativistische Energie* des Teilchens

$$\boxed{E \equiv W = \gamma m c^2}. \quad (12.34)$$

In der veralteten Schreibweise $m(v) \equiv \gamma m$ entspricht das der berühmten Formel $E = m(v)c^2$!

Für kleine Geschwindigkeiten können wir den γ -Faktor Taylor-entwickeln:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \quad (12.35)$$

Für die Energie ergibt sich daraus

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (12.36)$$

mit der *Ruheenergie* mc^2 und der nichtrelativistischen kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$. Da konstante Terme nicht messbar sind (vgl. die Diskussion der potentiellen Energie in Kapitel 1), spielt die Ruheenergie keine Rolle, solange die Teilchenmasse konstant ist. Die Energie hat somit den korrekten nichtrelativistischen Limes. Bei Umwandlungen oder Zerfällen von Teilchen in andere

Teilchen, wie sie z.B. in der Teilchenphysik vorkommen, ist die Ruheenergie dagegen entscheidend für die Energiebilanz.

Den Vierervektor (mu^μ) auf der linken Seite von Gl. (12.26) bezeichnet man als *Viererimpuls*⁵⁶

$$(p^\mu) \equiv m(u^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (12.37)$$

Für das Lorentz-invariante Längenquadrat folgt dann einerseits

$$p_\mu p^\mu = \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p}^2 \quad (12.38)$$

und andererseits

$$p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu \stackrel{(12.10)}{=} m^2 c^2. \quad (12.39)$$

Daraus ergibt sich die *relativistische Energie-Impulsbeziehung*

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (12.40)$$

Zieht man daraus die Wurzel

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \quad (12.41)$$

und entwickelt den Ausdruck für kleine Impulse,

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots, \quad (12.42)$$

findet man auch hier wieder die nichtrelativistische kinetische Energie $\frac{\vec{p}^2}{2m}$ als führende Korrektur zur Ruheenergie. Bei hochenergetischen Prozessen, z.B. in der Teilchenphysik, können die Terme höherer Ordnung nicht mehr vernachlässigt werden, und man muss den vollen relativistischen Ausdruck verwenden, um die Kinematik zu beschreiben.

⁵⁶ An dieser Stelle sehen wir, dass es gut war, dass wir die im Prinzip beliebige und nicht messbare Integrationskonstante in Gl. (12.34) auf null gesetzt haben. Bei einer anderen Wahl würde die relativistische Energie nicht zusammen mit dem relativistischen Impuls einen Vierervektor bilden.