

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.
⇒ $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$
- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \Rightarrow a = A \cos \varphi, \quad b = -A \sin \varphi)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \Rightarrow a = A \cos \varphi, \quad b = -A \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \Rightarrow a = A \cos \varphi, b = -A \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Energie: } E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \Rightarrow a = A \cos \varphi, b = -A \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Energie: } E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

5.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- ▶ Wähle $V(x_0) = 0$ und Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- ▶ unabhängige Lösungen:

- ▶ komplexe Lösungsbasis: $e^{i\omega_0 t}$, $e^{-i\omega_0 t}$

- ▶ äquivalente reelle Basis: $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi \Rightarrow a = A \cos \varphi, b = -A \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Energie: } E = T + V &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

- ▶ N -Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s), \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}$$

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

- ▶ N -Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s), \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}$$

- ▶ kompakte Notation: $q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$

5.2 Schwingende Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

- ▶ N -Teilchen-System, skleronome Zwangsbedingungen, s Freiheitsgrade:

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(q_1, \dots, q_s), \quad \dot{\vec{r}}^{(i)} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell} = m_{\ell k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial q_\ell}$$

- ▶ kompakte Notation: $q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \dot{q} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q) \equiv \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{m}(q) \dot{q} - V(q)$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► Bewegungsgleichungen:

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► Bewegungsgleichungen:

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► Bewegungsgleichungen:

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)$$

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► Bewegungsgleichungen:

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)$$

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^s \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{k, \ell=1}^s \left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► Bewegungsgleichungen:

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)$$

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{k,\ell=1}^s \left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$

► Gleichgewichtspunkte \leftrightarrow Lösungen $q(t) = q_0 = \text{const.}$, d.h. $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = 0$$



$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell - V(q)$$

► **Bewegungsgleichungen:**

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \dot{q}_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s \left(m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^s \frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \right)$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - \frac{\partial V(q)}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^s m_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{k,\ell=1}^s \left(\frac{\partial m_{jk}(q)}{\partial q_\ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{k\ell}(q)}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} = 0$$

► **Gleichgewichtspunkte** \leftrightarrow Lösungen $q(t) = q_0 = \text{const.}$, d.h. $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} = 0$$

stabiles Gleichgewicht: lokales Minimum im s -dim q -Raum

\Leftrightarrow Hesse Matrix $\left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} \right)$ hat nur positive Eigenwerte (s.u.)



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► **kleine Auslenkung:**

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► kleine Auslenkung:

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$
$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0}$$



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► **kleine Auslenkung:**

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0}$$

► **kin. Energie:** $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j} \Big|_{q=0} q_j + \dots$



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► **kleine Auslenkung:**

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0}$$

► **kin. Energie:** $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell$, $m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j} \Big|_{q=0} q_j + \dots$

Annahme: \dot{q} klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► **kleine Auslenkung:**

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0}$$

► **kin. Energie:** $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell$, $m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j} \Big|_{q=0} q_j + \dots$

Annahme: \dot{q} klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt

$$\Rightarrow T \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(0) \dot{q}_k \dot{q}_\ell$$

(bereits quadratisch in kleinen Größen)



Wähle $V(q_0) = 0$ und generalisierte Koordinaten so, dass $q_0 = 0$.

► **kleine Auslenkung:**

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{=0} + \sum_{k=1}^s \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_k} \Big|_{q=0}}_{=0 \text{ (Gleichgew.)}} q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0} q_k q_\ell + \dots$$
$$\approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s K_{k\ell} q_k q_\ell \quad \text{mit} \quad K_{k\ell} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \Big|_{q=0}$$

► **kin. Energie:** $T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(q) \dot{q}_k \dot{q}_\ell$, $m_{k\ell}(q) = m_{k\ell}(0) + \sum_j \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_j} \Big|_{q=0} q_j + \dots$

Annahme: \dot{q} klein, da q sonst nicht dauerhaft klein bleibt

$$\Rightarrow T \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s m_{k\ell}(0) \dot{q}_k \dot{q}_\ell \equiv \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s M_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad M_{k\ell} = m_{k\ell}(0)$$

(bereits quadratisch in kleinen Größen)



$$\Rightarrow L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s (M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - K_{kl} q_k q_l)$$



$$\Rightarrow L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s (M_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell} q_k q_\ell)$$

► Bewegungsgleichungen (für kleine Auslenkungen):

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \ddot{q}_k$$

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^s K_{jk} q_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^s (M_{jk} \ddot{q}_k + K_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, \dots, s$$



$$\Rightarrow L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^s (M_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell - K_{k\ell} q_k q_\ell)$$

► Bewegungsgleichungen (für kleine Auslenkungen):

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s M_{jk} \ddot{q}_k$$

$$\text{► } \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^s K_{jk} q_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^s (M_{jk} \ddot{q}_k + K_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, \dots, s$$

► Matrixnotation:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q}, \quad V = \frac{1}{2} q^T \underline{\underline{K}} q, \quad L = \frac{1}{2} (\dot{q}^T \underline{\underline{M}} \dot{q} - q^T \underline{\underline{K}} q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}} \ddot{q} + \underline{\underline{K}} q = 0}$$

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} + \underline{\underline{K}}q = 0$$



$$\underline{\underline{M}} \ddot{q} + \underline{\underline{K}} q = 0$$

- ▶ Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t}$



$$\underline{M} \ddot{q} + \underline{K} q = 0$$

► Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$



$$\underline{\underline{M}} \ddot{q} + \underline{\underline{K}} q = 0$$

► Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$

$\Rightarrow \boxed{(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \tilde{q} = 0}$ homogenes lineares Gleichungssystem
für die s Komponenten von \tilde{q}



$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} + \underline{\underline{K}}q = 0$$

► Lösungsansatz: $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{q} = i\omega q, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q$

$\Rightarrow \boxed{(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \tilde{q} = 0}$ homogenes lineares Gleichungssystem
für die s Komponenten von \tilde{q}

► triviale Lösung: $\tilde{q} = 0$ (existiert immer, aber physikalisch uninteressant)

► nicht-triviale Lösungen:

existieren nur, wenn die Gleichungen linear abhängig sind

$\Leftrightarrow \boxed{\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0}$ „Säkulargleichung“
(verallgemeinertes Eigenwertproblem)



Säkulargleichung: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$

▶ linke Seite = Polynom s -ten Grades in ω^2

→ s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j : „Eigenfrequenzen“)

zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)



Säkulargleichung: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$

- ▶ linke Seite = Polynom s -ten Grades in ω^2
 - s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j : „Eigenfrequenzen“)
 - zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- ▶ K und M sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$



Säkulargleichung: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$

- ▶ linke Seite = Polynom s -ten Grades in ω^2
 - s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j : „Eigenfrequenzen“)
 - zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- ▶ $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- ▶ $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.



Säkulargleichung: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$

- ▶ linke Seite = Polynom s-ten Grades in ω^2
 - s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j : „Eigenfrequenzen“)
 - zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- ▶ K und M sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- ▶ $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.
- ▶ Mögliche Normierung: $\tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = 1$
Dann gilt: $\tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \delta_{ij}$



Säkulargleichung: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$

- ▶ linke Seite = Polynom s -ten Grades in ω^2
→ s verallgemeinerte Eigenwerte ω_j^2 (ω_j : „Eigenfrequenzen“)
zugehörige Eigenvektoren: $\tilde{q}^{(j)}$ („Normalmoden“)

Eigenschaften (weitgehend ohne Beweis)

- ▶ $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ sind symmetrisch. $\Rightarrow \omega_j^2 \in \mathbb{R}$
- ▶ $\tilde{q}^{(j)}$ können reell gewählt werden.
- ▶ Mögliche Normierung: $\tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = 1$

Dann gilt: $\tilde{q}^{(i)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \delta_{ij}$

- ▶ $\{\tilde{q}^{(j)}\}$ bildet eine Basis des s -dimensionalen Raums der q .



- verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{\mathbf{q}}^{(l)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{\mathbf{q}}^{(l)}$



► verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{\mathbf{q}}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{\mathbf{q}}^{(j)}$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{q}}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{\mathbf{q}}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{\mathbf{q}}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{\mathbf{q}}^{(j)} = \omega_j^2$$



- ▶ verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)}$
 $\Rightarrow \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$
- ▶ stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):
 $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q



- ▶ verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)}$
 $\Rightarrow \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$
- ▶ stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):
 $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q
 $\Rightarrow \omega_j^2 > 0 \Rightarrow \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$



- ▶ verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)}$
 $\Rightarrow \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$
- ▶ stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):
 $\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q
 $\Rightarrow \omega_j^2 > 0 \Rightarrow \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$
- ▶ labiler Gleichgewichtspunkt (\neq lokales Minimum von V):
 $\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit \Rightarrow Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \Rightarrow \omega_j = \pm i|\omega_j|$.



▶ verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)}$

$$\Rightarrow \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$$

▶ stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

$\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q

$$\Rightarrow \omega_j^2 > 0 \Rightarrow \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$$

▶ labiler Gleichgewichtspunkt (\neq lokales Minimum von V):

$\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit \Rightarrow Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \Rightarrow \omega_j = \pm i|\omega_j|$.

Einsetzen in Lösungsansatz $q(t) = \tilde{q}e^{i\omega t} \rightarrow q(t) = a e^{-|\omega_j|t} + b e^{+|\omega_j|t}$



▶ verallgemeinerte Eigenwertgleichung: $\underline{\underline{K}}\tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \underline{\underline{M}}\tilde{q}^{(j)}$

$$\Rightarrow \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{K}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2 \tilde{q}^{(j)T} \underline{\underline{M}} \tilde{q}^{(j)} = \omega_j^2$$

▶ stabiler Gleichgewichtspunkt (= lokales Minimum von V):

$\underline{\underline{K}}$ (= Hesse-Matrix) positiv definit $\Leftrightarrow q^T \underline{\underline{K}} q > 0$ für alle q

$$\Rightarrow \omega_j^2 > 0 \Rightarrow \omega_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, s$$

▶ labiler Gleichgewichtspunkt (\neq lokales Minimum von V):

$\underline{\underline{K}}$ nicht positiv definit \Rightarrow Es gibt Eigenwerte $\omega_j^2 < 0 \Rightarrow \omega_j = \pm i|\omega_j|$.

Einsetzen in Lösungsansatz $q(t) = \tilde{q}e^{i\omega t} \rightarrow q(t) = a e^{-|\omega_j|t} + b e^{+|\omega_j|t}$

↑
Instabilität