# Klassische Teilchen und Felder

**Priv.-Doz. Dr. M. Buballa**
**M. J. Steil**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Wintersemester 2018/19**
1. Übungsblatt — 17. und 19. Oktober 2018

### Aufgabe P1: Zylinderkoordinaten

Gegeben ist folgender Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R(t)\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + R(t)\sin(\omega t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z, \; t \geq 0 \tag{P1.1}$$

mit der positiven Konstanten $\omega$ und den stetig differenzierbaren Funktionen $R(t)$ und $z(t)$.

a) Aufgrund der Symmetrie des Problems bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an. Stellen Sie den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ sowie dessen Betrag für allgemeine $R(t)$ und $z(t)$.

c) Es seien nun $R(t) = R,\; R > 0$ und $z(t) = v_z t,\; v_z \geq 0$. Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\,\left|\vec{v}(\tilde{t})\right|$ für eine Umdrehung. Was ergibt sich im Spezialfall $v_z = 0$?

### Aufgabe P2: Felder und Potenziale

Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2ay + cz)\vec{e}_x + (ax + 2z - 2bz + bz^2)\vec{e}_y + (-2x + 2cx + 2byz)\vec{e}_z \tag{P2.1}$$

die Rotation. Für welche Werte von $a$, $b$ und $c$ verschwindet diese Rotation? Berechnen Sie für diese Werte das zu $\vec{F}(\vec{r})$ gehörende Potenzial $V(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \tag{P2.2}$$

### Aufgabe P3: Bewegungsgleichung für einen Freiheitsgrad

Ein Punktteilchen der konstanten Masse $m$ bewegt sich in einer Dimension. Seine Bewegung ist durch die Gleichung

$$m\ddot{z} = F(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \tag{P3.1}$$

bestimmt. Die wirkende Kraft $F$ kann durch die Ableitung des Potenzials $-dV(z)/dz$ ausgedrückt werden.

a) Leiten Sie aus Gl. (P3.1) die Energieerhaltung $E = T + V = \text{const.}$ her. Multiplizieren Sie dazu beide Seiten mit $\dot{z}$ und schreiben Sie die auftretenden Terme als totale Zeitableitung.

b) Der Energiesatz $E = T + V$ ist eine Differenzialgleichung für $z(t)$. Bestimmen Sie die Funktion $t(z)$ für ein allgemeines Potenzial $V(z)$ durch Trennung der Variablen und Integration.

c) Bestimmen Sie für das Potenzial $V(z) = gz$ die Fallzeit $t(z = 0)$ mit Hilfe der Integralgleichung aus Teilaufgabe b) und den Anfangsbedingungen $t_0 = 0$ und $z_0 = h > 0$.

## Aufgabe H1: Wegintegrale (1+1+1=3 Punkte)

Betrachten Sie eine Bahnkurve $\mathscr{C}$, die in einem Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \big(2x + y\big)\vec{e}_x + (2y)\vec{e}_y + (x + 4z)\vec{e}_z \tag{H1.1}$$

durchlaufen wird. Die Parametrisierung der Bahnkurve sei

$$\vec{r}(\tau) = \tau\vec{e}_x + \tau^2\vec{e}_y + \tau\vec{e}_z \tag{H1.2}$$

mit dem Bahnparameter $\tau \in \big[\tau_0, \tau_1\big]$.

a) Bestimmen Sie das Wegintegral entlang $\mathscr{C}$ mit obiger Parametrisierung für $\tau_0 = 0$ und $\tau_1 = 1$ nach

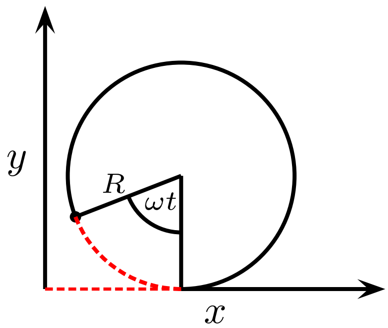
$$\int_{\mathscr{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau\, \vec{A}\big(\vec{r}(\tau)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(\tau). \tag{H3.3}$$

b) Finden Sie eine Parametrisierung für eine Bahnkurve $\mathscr{C}_1$ entlang der geraden Linie von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$? Berechnen Sie für $\mathscr{C}_1$ den Wert des Wegintegrals.

c) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$.

## Aufgabe H2: Rollendes Rad (1+1=2 Punkte)

Ein Kreis mit Radius $R$ rollt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ auf einer Geraden ab.




a) Geben Sie die Parameterdarstellung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes P auf dem Kreis an, für den $\vec{r}(t = 0) = 0$ gilt. Hinweis: Betrachten Sie die beiden Komponenten von $\vec{r}(t)$ zunächst separat und beachten Sie die Rollbedingung.

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge $S$ dieser Bahnkurve für eine Umdrehung. Hinweis: $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$

## Aufgabe H3: Drehimpuls (1 Punkt)

Ein Teilchen der konstanten Masse $m$ bewege sich gleichförmig auf der Bahn

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} t. \tag{H3.1}$$

Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L}(t)$ bezüglich des Koordinatenursprungs. Ist der Drehimpuls erhalten?