Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
14. Übungsblatt 6. und 8. Februar 2019

Aufgabe P28: Lorentztransformationen und Ereignisse

Betrachten Sie die folgenden beiden Probleme in zwei dimensionaler Raum-Zeit (t, x).

a) In einem Inertialsystem **K** finden die Ereignisse 1 und 2 am gleichen Ort ($\Delta x_{12} = 0$) mit einem zeitlichen Abstand Δt_{12} statt. Berechnen Sie den räumlichen Abstand $\Delta x'_{12}$ der beiden Ereignisse in einem Inertialsystem $\mathbf{K}'$, in welchem die Ereignisse den zeitlichen Abstand $\Delta t'_{12}$ haben. Mit welcher Relativgeschwindigkeit v bewegen sich **K** und $\mathbf{K}'$ zueinander? Drücken Sie Ihre Ergebnisse für $\Delta x'_{12}$ und v als Funktionen von Δt_{12} und $\Delta t'_{12}$ aus.

b) In einem Inertialsystem **K** finden die Ereignisse 3 und 4 zur selben Zeit ($\Delta t_{34} = 0$) mit einem räumlichen Abstand von Δx_{34} statt. Berechnen Sie den zeitlichen Abstand $\Delta t'_{34}$ der beiden Ereignisse in einem Inertialsystem $\mathbf{K}''$, in welchem die Ereignisse den räumlichen Abstand $\Delta x''_{34}$ haben. Mit welcher Relativgeschwindigkeit u bewegen sich **K** und $\mathbf{K}''$ zueinander? Drücken Sie Ihre Ergebnisse für $\Delta t''_{34}$ und u als Funktionen von Δx_{34} und $\Delta x''_{34}$ aus.

Aufgabe P29: Elektromagnetische Welle

Betrachten Sie im Folgenden eine transversale, linear polarisierte, elektromagnetische Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t) \tag{P29.1}$$

in einem nichtleitenden, ungeladen Medium mit (ε_r, μ_r).

a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

b) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ der Welle.

c) Berechnen Sie den Strahlungsdruck $p_S(z = 0, t)$, welcher von der Welle auf eine total absorbierende Ebene ($z = 0$) ausgeübt wird, welche die Welle unter dem Winkel ϑ trifft. Berechnen Sie anschließen den über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ mittels

$$\overline{p}_S \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt\, p_S(z = 0, t) \tag{P29.2}$$

gemittelten Strahlungsdruck.

Hinweis: Die Dichte des Impulses $\hat{\vec{P}}_{EM}(\vec{r}, t)$, der pro Einheitsvolumen im elektromagnetischen Feld gespeichert ist, ist gegeben durch $\vec{S}(\vec{r}, t)/u^2$, wobei u die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium ist. Des Weiteren ist Druck generell Kraft pro Fläche und Kraft ist Impuls pro Zeit. Für Ihre Rechnungen könnte die Halb-Winkel-Formel $\sin(\theta/2) = 1/2 - \cos(\theta)/2$ hilfreich sein.

Aufgabe H31: Lorentz-Kontraktion (1+1+1=3 Punkte)

Ein quaderförmiger Gegenstand befinde sich im Koordinatensystem $\mathbf{K}$ in Ruhe und besitze die Länge $l = x_2 - x_1$, die Breite $b = y_2 - y_1$ und die Höhe $h = z_2 - z_1$.

a) Ein Beobachter, welcher sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung bewege, bestimme die Abmessungen des Quaders bezüglich seines mitbewegten Koordinatensystems $\mathbf{K}'$. Zu welchem Ergebnis kommt er für l', b' und h'?

b) Während seines Vorbeifluges fotografiere der Beobachter den Quader aus großer Entfernung. Dabei sei seine Kamera parallel zur z'-Achse ausgerichtet. Es müssen für die folgende Diskussion also nur Lichtstrahlen parallel zur z'-Achse betrachtet werden. Skizzieren Sie das Bild, welches der Beobachter erhält.

c) Zeigen Sie, dass das Bild des Beobachters aus Teilaufgabe b) mit dem Bild eines mit dem Drehwinkel α um die y'-Achse gedrehten, in $\mathbf{K}'$ ruhenden Quaders mit den Kantenlängen l, b und h übereinstimmt. Bestimmen Sie diesen Drehwinkel α.

Aufgabe H32: Elektromagnetische Potenziale (1+1+1=3 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorpotenzial der Form

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = f(x - ct)\vec{e}_z, \tag{H32.1}$$

wobei $f(x - ct) \in \mathbb{C}$. Das skalare Potenzial sei $\phi(\vec{r}, t) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass die beiden Potenziale sowohl die Lorenz- als auch die Coulomb-Eichbedingung erfüllen.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in Lorenz-Eichung das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ die Wellengleichung

$$\Box\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) \tag{H32.2}$$

erfüllt. Überprüfen Sie explizit durch Einsetzen, dass in Abwesenheit von äußeren Strömen (d. h. $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$) das obige Potenzial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ die Wellengleichung erfüllt. Berechnen Sie $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Erfüllen diese die Wellengleichungen?

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $f(x - ct) = f_0 \cos(k(x - ct))$, $f_0 \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie die Energiedichte $w(\vec{r}, t)$ und die Energiestromdichte $\vec{S}(\vec{r}, t)$. Bestimmen Sie die über eine Periode T gemittelte, siehe Gl. (P29.2), Energiedichte $\overline{w}$ sowie die entsprechend gemittelte Energiestromdichte $\overline{\vec{S}}$.