Klassische Teilchen und Felder

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2018/19
2. Übungsblatt 24. und 26. Oktober 2018

Aufgabe P4: Zweiteilchen-Systeme

Wir betrachten ein Zweiteilchen-System und führen neben der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und der Schwerpunktskoordinate $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}^{(1)}+m_2\vec{r}^{(2)}}{m_1+m_2}$ die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ und die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}$ ein.

a) Drücken Sie die Ortsvektoren $\vec{r}^{(1,2)}$ in Relativ- und Schwerpunktskoordinaten aus.

b) Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie als $T = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2$ darstellen lässt.

c) Zeigen Sie, dass sich der Drehimpuls als $\vec{L} = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ darstellen lässt.

d) Für welchen Spezialfall hängt der Drehimpuls eines Zweiteilchen-Systems nicht vom Bezugspunkt ab?

Aufgabe P5: Mathematisches Pendel

Betrachten Sie ein idealisiertes Fadenpendel: Eine Punktmasse m ist an einer masselosen Stange der Länge l im Schwerefeld der Erde ($g = \text{const.}$) aufgehängt. Der Aufhängepunkt bildet den Ursprung eines für die folgenden Rechnungen gut geeigneten Koordinaten Systems. Der Auslenkungswinkel wird im Folgenden mit ϕ bezeichnet.

a) Stellen Sie die Energiebilanz für das Pendel auf. Die Gesamtenergie des Pendels ist eine Erhaltungsgröße. Fixieren Sie den Wert der Gesamtenergie durch die potenzielle Energie am Punkt der maximalen Auslenkung, welcher den Auslenkungswinkel ϕ_m habe.

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Dauer T_s einer vollen Schwingung (von ϕ_m nach $-\phi_m$ und zurück) in Form eines Integrals. Leiten Sie dazu zunächst einen Ausdruck für $d\phi/dt$ aus der Energiebilanz ab. Nutzen Sie die Symmetrien des Integranden um das Integrationsintervall auf $[0, \phi_m]$ zu reduzieren.

c) Das Integral für T_s ist elementar nicht lösbar. Wir wollen es daher in ϕ_m bis zur führenden Ordnung entwickeln. Dazu bietet es sich an wie folgt vorzugehen. Nutzen Sie die Reihendarstellung des Kosinus um $\cos(\phi) - \cos(\phi_m)$ bis zur quadratischen Ordnung zu entwickeln. Das nun zu lösende Integral kann auf die Form $\int_0^1 1/\sqrt{1-x^2}dx$ gebracht werden und dieses Integral hat den Wert $\pi/2$.

Aufgabe H4: Bahnen in drei Dimensionen (1+1+1+0.5+0.5=4 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, dass sich in drei Dimensionen auf folgender Bahn

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = a\sin(\omega_1 t)\vec{e}_x + b\cos(\omega_1 t)\vec{e}_y + c\sin(\omega_2 t)\vec{e}_z \tag{H4.1}$$

bewegt. Die Parametern seien dabei $a, b, c > 0$, $\omega_1 > 0$ und $\omega_2 \in \mathbb{R}$.

a) Welche Kraft wirkt auf das Teilchen? Benutzen Sie das zweite Newton'sche Gesetz.

b) Ist die Kraft konservativ? Wenn ja bestimmen Sie dass das zugehörige Potenzial $V(\vec{r})$. Hinweis: ein Ansatz für $V(\vec{r})$ der Form $c_x x(t)^2 + c_y y(t)^2 + c_z z(t)^2 + \text{const.}$ könnte hilfreich sein.

c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Massenpunkts? Ist sie erhalten?

d) Wie lautet der Drehimpuls des Massenpunkts?

e) Bestimmen Sie einen Wert für $\omega_2 \neq 0$, so dass der Drehimpuls erhalten ist.

Aufgabe H5: Der fallende Regentropfen (0.5+1.5=2 Punkte)

Ein kugelförmiger Regentropfen mit Radius $R(t)$ und Dichte $\rho = \text{const.}$ fällt im Schwerefeld der Erde in einer mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre. Durch Kondensation wächst die Masse $m(t)$ des Tropfens während seines Falles proportional zu seiner Oberfläche an:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \lambda R(t)^2, \ \lambda > 0. \tag{H5.1}$$

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Regentropfens mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes auf. Hierbei kann die Fallbeschleunigung als konstant und die Atmosphäre als homogen angenommen werden.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für einen Tropfen mit verschwindender Ausgangsmasse und -geschwindigkeit durch Trennung der Variablen und Integration. Es bietet sich an, zunächst Gl. (H5.1) für einen expliziten Ausdruck für $m(t)$ zu integrieren. Des Weiteren ist folgender Trick für Differenzialgleichungen der Form $xf'(x) + nf(x) = g(x)$ hilfreich: multiplizieren sie das gesamte System mit x^{n-1} und verwenden Sie die Produktregel bevor Sie integrieren.