Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 7 — 27. November 2014

Aufgabe P15: Zeitlich veränderliche Trägheitsmomente

Die Oberfläche eines pulsierenden Sterns (eines sog. Cepheiden) pulsiere mit der Frequenz ω. In einem einfachen Modell kann dieser Stern als homogenes rotierendes Ellipsoid mit zeitlich veränderlichen Hauptträgheitsmomenten betrachtet werden.

$$A = B = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2)(1 - \tfrac{\epsilon}{2} \sin(\omega t)) , \quad C = \frac{2}{5} M a^2 (1 + \epsilon \sin(\omega t)) \tag{1}$$

Es gelte $a < b$ und $\epsilon \ll 1$.

a) Zeigen Sie aus den Eulerschen Gleichungen, dass die ζ-Komponente der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$ näherungsweise erhalten bleibt.

b) Zeigen Sie allgemein, dass $\vec{\Omega}(t)$ für $\omega \ll \Omega_\zeta$ eine Präzession mit der Frequenz

$$\omega_P = \frac{C - A}{A} \Omega_\zeta \tag{2}$$

um die ζ-Achse ausführt. Vernachlässigen Sie hierfür die zeitliche Änderung der Trägheitsmomente sowie $\dot{\Omega}_\zeta$.

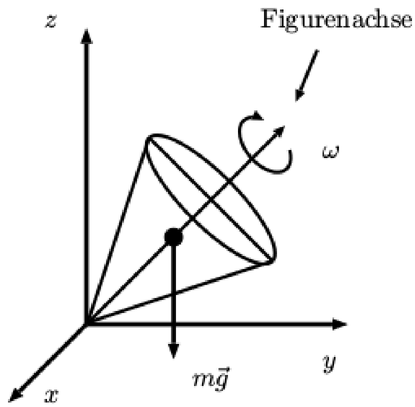
c) Setzen Sie nun A, C und Ω_ζ in Gl.(2) ein und enwickeln Sie ω_P bis zur linearen Ordnung in ϵ. Woher kommen die Beiträge zur Präzessionsfrequenz? Betrachten Sie den Fall $a = b = R$.

Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} , \quad |r| < 1.$$

Aufgabe P16: Schwerer schneller Kreisel I (Präzession)

Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel im homogenen Schwerefeld. Der Kreisel rotiere sehr schnell um seine Figurenachse $\vec{e}_\zeta$. Die Figurenachse sei nicht parallel zur z-Achse des raumfesten Systems. Der Kreisel werde in seinem Fußpunkt, welcher den Abstand s vom Schwerpunkt habe festgehalten.



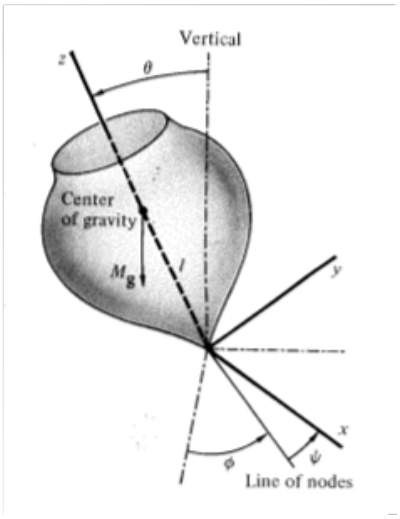
a) In welche Richtung zeigen $\vec{\omega}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$? Welches Drehmoment wirkt auf den Kreisel?

b) Stellen Sie ausgehend vom Drehimpulssatz die Bewegungsgleichung für $\vec{\omega}$ auf und bestimmen Sie die Präzessionsfrequenz ω_P.

c) Wie verhält sich die z-Komponente von $\vec{\omega}$?

Aufgabe H8: Schwerer schneller Kreisel II (Nutation) (3+2+2+1+1+1+1 Punkte)

Betrachten Sie wieder einen schnellen symmetrischen Kreisel (Trägheitsmomente: $A = B \neq C$) im homogenen Schwerefeld, dessen kinetische Energie wesentlich größer als seine potentielle Energie ist: $\frac{1}{2}C\omega_z^2 \gg Mgl$.
Seine Lage sei durch die Eulerwinkel $\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ beschrieben mit den Anfangsbedingungen $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Bestimmen Sie die Nutationsamplitude $\delta x = \cos(\theta_0) - \cos(\theta_1)$, wobei θ_1 und θ_0 Umkehrpunkte der Nutation sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



a) Drücken Sie die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω_i durch die Eulerwinkel aus. Zeigen Sie, dass die Drehimpulse um die z-Achse (körperfestes System) und die 3-Achse (vertikale Achse im raumfesten System) durch

$$L_z = C(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$
$$L_3 = (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\dot{\phi} + C\dot{\psi}\cos\theta$$

gegeben sind und das sie zeitlich erhalten sind.

b) Stellen Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie des Kreisels

$$E = T + V$$

in Abhängigkeit von θ und $\dot{\theta}$ auf. Nutzen Sie dafür die Erhaltung von L_z und L_3 um $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ zu ersetzen.

Sie haben damit eine effektives eindimensionales Problem.

c) Definieren Sie, analog zum Kepler-Problem, ein effektives Potential in Abhängigkeit von $\cos\theta$ und machen Sie sich qualitativ die Bewegung in diesem Potential klar.

d) Warum ist $u_0 = \cos(\theta_0)$ mit $\theta_0 = \theta(0)$ ein Nullstelle des eff. Potentials? Zeigen Sie

$$u_0 = \frac{L_3}{L_z} = \frac{E - \frac{1}{2}C\omega_z^2}{Mgl}$$

mit Hilfe der Erhaltungsgrößen.

e) Zeigen Sie, mit Hilfe des Ausdrucks für die Gesamtenergie, dass die Umkehrpunkte der Nutation durch die Lösungen folgender Gleichung 3ten Grades gegeben sind

$$0 = (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (L_3 - L_z u)^2, \tag{3}$$
$$\alpha = 2A(E - \frac{C}{2}\omega_z^2)\,, \quad \beta = 2AMgl\,.$$

f) Zeigen Sie weiter, dass Gl.(3) äquivalent zu

$$0 = (u_0 - u)\left[\beta(1-u^2) - L_z^2(u_0 - u)\right]$$

ist. Damit ergibt sich die zweite Lösung u_1 durch

$$0 = \beta(1-u_1^2) - L_z^2(u_0 - u_1)\,. \tag{4}$$

g) Setzen Sie $u_1 = u_0 - \delta x$ und linearisieren Sie die Gleichung, d.h. vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\delta x^2)$. Bestimmen Sie die Nutationsamplitude δx. Warum ist diese Näherung gerechtfertigt?