Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 9 11. Dezember 2014

Aufgabe P19: Achterbahn

Ein Wagen (als Massenpunkt gedacht) gleite reibungsfrei auf einer Schiene, die in der x-z-Ebene verläuft und durch die Kurve $z = z(x)$ beschrieben wird. Auf den Wagen wirkt in negativer z-Richtung die Gewichtskraft.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zwangskraft in der Form $\vec{Z} = \vec{Z}(z'', z', \dot{x})$ her (wobei $z' = \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, $z'' = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}x^2$ und $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ sei).

b) Sei

$$z(x) = a\left[\cosh(\frac{x}{a} - 1)\right],$$

mit einer Konstante $a > 0$. Wie lautet die vom Wagen auf die Schiene ausgeübte Kraft in einem beliebigen Punkt $(x, z(x))$, wenn der Wagen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Höhe $z_0 > 0$ startet?

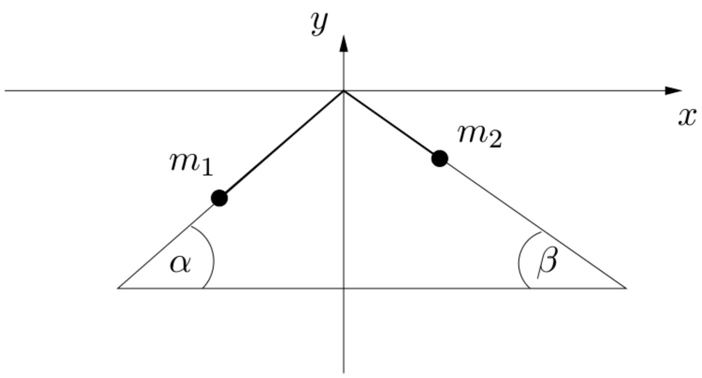
c) Sei nun

$$z(x) = a\left[1 - \cosh(\frac{x}{a})\right].$$

An welchem Ort und mit welcher Geschwindigkeit springt der Wagen von der Schiene, wenn er zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = 0$ mit einer Geschwindigkeit $\dot{x}_0 > 0$ startet?

Aufgabe P20: D'Alembertsches Prinzip

Wir betrachten nochmal eine doppelte schiefe Ebene mit zwei durch ein Seil verbundenen Punktmassen, also das gleiche System wie in Aufgabe H9.

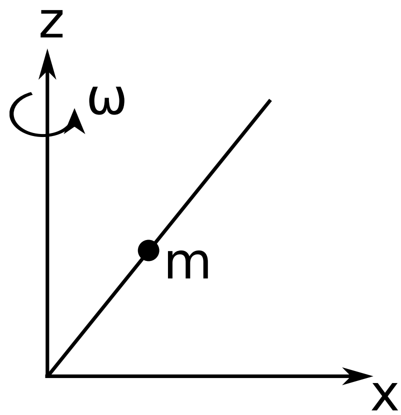


a) Nutzen Sie die Zwangsbedingungen $f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $i = 1, \ldots k$ aus H9 und bestimmen Sie die virtuellen Verrückungen δx_i und δy_i, $i = 1, 2$.

b) Stellen Sie die d'Alembertsche Bewegungsgleichung auf. Was fällt ihnen im Vergleich zum Lösungsweg mit Hilfe des Lagrange-Formalismus 1. Art in H9 auf?

Aufgabe H10: Rotierender Stab (3+3+3+1 Punkte)

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei im homogenen Schwerefeld auf einem Stab mit Länge l bewegen. Der Stab sei durch eine Gerade mit der Steigung a parametrisiert, mit $a > 0$. Der Stab rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.



a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Perle mit Hilfe der Lagrange-Gleichung 2. Art her.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung.

c) Die Perle befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $\vec{x} = 0$. Wie müssen Sie die Anfangsgeschwindigkeit wählen, damit die Perle das Ende des Stabes erreicht?

d) Was ändert sich für den Fall $a < 0$?