Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020
6. Übungsblatt 31. Januar 2020

Aufgabe 16: Beta- und Gamma-Funktionen der masselosen pseudo-skalaren Yukawa Theorie

Betrachten Sie im Folgenden die pseudo-skalare Yukawa Theorie aus Aufgabe 14 im masselosen Grenzfall $m_\phi = m_\psi = 0 \rightarrow \delta_{m_\phi} = \delta_{m_\psi} = 0$. Die in Teilaufgabe 14e) auftretenden $2/\epsilon$ Pole können Sie in dieser Aufgabe mit logarithmischen Divergenzen identifizieren. Verwenden Sie explizit

$$\frac{2}{\epsilon} \rightarrow \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \tag{16.1}$$

mit dem UV Cufoff Λ und der Renormierungsskala M. Alle für diese Aufgabe benötigten Loop-Integrale/Counterterme wurden bereits in Aufgabe 14 berechnet.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 14e) berechneten Counterterme δ_ψ und δ_ϕ die Gamma-Funktionen $\gamma_\psi(\lambda, g)$ und $\gamma_\phi(\lambda, g)$ zu führender Ordnung unter der Annahme, dass λ und g^2 die selbe Ordnung haben. Wenden Sie hierzu die Callan-Symanzik Gleichung auf die divergenten Beiträge zur fermionischen und bosonischen Zweipunktfunktion an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 14e) berechneten Counterterme δ_g und δ_λ und Teilaufgabe a) die Beta-Funktionen $\beta_g(\lambda, g)$ und $\beta_\lambda(\lambda, g)$ zu führender Ordnung unter der Annahme, dass λ und g^2 die selbe Ordnung haben. Wenden Sie hierzu die Callan-Symanzik Gleichung auf die divergenten Beiträge zur Drei- und Vier-Punkt-Funktion an.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe b) berechneten Beta-Funktion die laufenden Kopplungskonstante $\bar{g}^2(p)$, welche durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}(p)}{\mathrm{d}\ln(p/M)} = \beta_g(\bar{\lambda}, \bar{g}) \tag{16.2}$$

bestimmt ist. Fixieren Sie die auftretenden Integrationskonstanten durch die Bedingungen $\bar{g}(p = M) = g$.

Aufgabe 17: Beta-Funktion des Gross-Neveu Modells

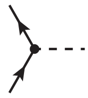
Betrachten Sie im Folgenden das in Aufgabe 15 diskutierte Gross-Neveu (GN) Modell in der bosonisierten Formulierung

$$\mathcal{L}[\bar{\psi},\psi] \equiv \bar{\psi}_i \mathrm{i}\partial\!\!\!/ \psi_i - \frac{1}{2}\phi^2 - G\phi\bar{\psi}_i\psi_i - \bar{\psi}_i \mathrm{i}\delta_\psi \partial\!\!\!/ \psi_i - \frac{1}{2}\delta_\phi \phi^2 - \delta_G \phi\bar{\psi}_i\psi_i, \tag{17.1}$$

mit $G^2 \equiv \frac{g^2}{N_f}$ und $\phi = \varphi/G$ im Vergleich zu Aufgabe 15 und den Countertermen δ_ψ, δ_ϕ und δ_G. Die Feynman-Regeln sind gegeben durch

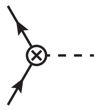
(i) $= \frac{\mathrm{i}}{p\!\!\!/ + \mathrm{i}\varepsilon}$

(ii) $= -\mathrm{i}$

(iii)  $= -\mathrm{i}G$

(iv)  $= \mathrm{i}\delta_\psi$

(v)  $= -\mathrm{i}\delta_\phi$

(vi)  $= -\mathrm{i}\delta_G$

Fordern Sie als Renormierungsbedingungen Konvergenz der Ein-Loop Zwei- und Drei-Punkt-Amplituden bei verschwindenden externen Impulsen. Verwenden Sie zur Berechnung der divergenten Loop-Integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2} = -\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right). \tag{17.2}$$

a) Bestimmen Sie die divergenten Beiträge zu δ_ψ, δ_ϕ und δ_G in führender Ordnung.

b) Berechnen, analog zu Aufgabe 16b), mit Hilfe der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) die Beta-Funktion $\beta_G(G)$ und zeigen Sie, dass

$$\beta_G(G) = -\frac{N_f - 1}{2\pi}G^3. \tag{17.3}$$

c) In Aufgabe 15d) wurde das effektive Potential des GN für $N_f \to \infty$ berechnet:

$$V_{\mathrm{eff}}(\varphi_{\mathrm{cl}}) = \frac{1}{2G^2}\varphi_{\mathrm{cl}}^2 + \frac{N_f}{4\pi}\varphi_{\mathrm{cl}}^2(\ln(\varphi_{\mathrm{cl}}^2/\Lambda^2) - 1).. \tag{17.4}$$

Berechnen Sie die Beta-Funktion, welche sich aus der Forderung

$$\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}V_{\mathrm{eff}}(\varphi_{\mathrm{cl}}) = 0 \tag{17.5}$$

ergibt und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Gl. (17.3).

Aufgabe 18: Zeitumkehr in QED

Betrachten Sie im Folgenden die Lagrange Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathrm{i}\theta F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{18.1}$$

mit dem anti-symmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ und dem Parameter θ.

a) Zeigen Sie unter Verwendung von $F^{0i} = -E^i$ und $F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) + 8\mathrm{i}\theta(\vec{E}\cdot\vec{B}). \tag{18.2}$$

Machen Sie sich mit Hilfe dieses Ausdruckes klar, warum $\mathcal{L}$ für $\theta \neq 0$ nicht invariant unter Zeitumkehr ist.

b) Zeigen Sie, dass sich der Zeitumkehr-verletzende Term $F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 8\vec{E}\cdot\vec{B}$ als eine Divergenz $\partial_\mu K^\mu$ schreiben lässt. Bestimmen Sie K_μ.

c) Argumentieren Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe b), dass die Theorie mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ für physikalische Konfigurationen mit einer endlichen Wirkung für endliche θ invariant unter Zeitumkehr ist.