

VII. Loop-Korrekturen und Notwendigkeit der Renormierung

Beispiel: $e^- \mu^-$ - Streuung

bisher: 1. Ordnung Störungstheorie

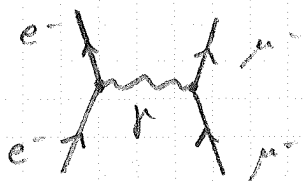
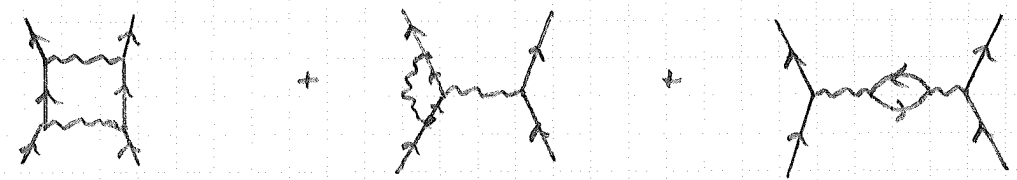
$$iM^{(1)} = \text{Diagramm} \sim \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (\text{„Feinstrukturkonstante“})$$


Diagramme in 2. Ordnung Störungstheorie ($O(\alpha^2)$)

$$iM^{(2)} = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} + \dots$$


„Zwei-Photon-Austausch“ „Vertex-Korrektur“ „Vakuum-Polarisation“

Die Diagramme enthalten geschlossene Loops.

→ Integral über einen unbestimmten Impuls

häufiges Resultat:

Die Integrale divergieren (obwohl diese Diagramme kleine Korrekturen in der Störungs-entwicklung sein sollten...)!

Wie geht man damit um?

→ Renormierung

VII.1 Renormierung der ϕ^4 -Theorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_0)^2 - m_0^2 \phi_0^2] \quad ; \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$

ϕ_0, m_0, λ_0 : unrenormierte („nackte“) Größen

↳ nackter Propagator: $\frac{1}{p} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} =: i\mathcal{D}_0(p)$

nackter Vertex: $\times = -i\lambda_0$

Betrachte nun Wechselwirkungskorrekturen:

voller („gedrehter“) Propagator:

$$i\mathcal{D}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T (\phi_0(x) \phi_0(0)) | \Omega \rangle$$

diagrammatisch:

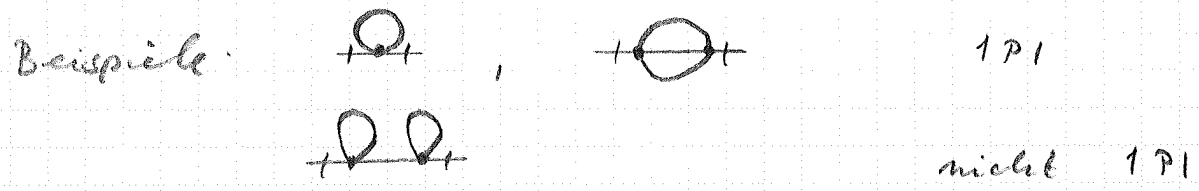
$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

mit

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{äußere Prop.} \\ \text{entfernt} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} = -i\Sigma(p) = \text{„ein-Teilchen-irreduzible Selbstenergie-Einschübe“}$$

ein-Teilchen-irreduzibel (1PI):

kann nicht durch Zerschneiden einer einzelnen Linie in zwei Teile zerlegt werden.



$$\begin{aligned} \Rightarrow iD(p) &= iD_0(p) + iD_0(p) (-i\Sigma(p)) iD_0(p) + \dots \\ &= iD_0(p) + iD_0(p) \Sigma(p) D(p) \end{aligned}$$

↑ volle Prop.

$$\Leftrightarrow D_0^{-1}(p) = D^{-1}(p) + \Sigma(p)$$

$$\Rightarrow iD(p) = i [D_0^{-1}(p) - \Sigma(p)]^{-1} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p) + i\epsilon}$$

Dieser Ausdruck ist exakt, wenn $\Sigma(p)$ alle 1PI - Selbstenergie - Einschübe enthält.

In der Praxis muss man $\Sigma(p)$ aber nähern, z.B. in einer Störungsentwicklung.

niedrigste Ordnung:

$$-i\Sigma(p) = \text{Diagram} = \frac{1}{2} (-i\lambda_0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

- hängt nicht von p ab
 Grund: Einschub punktförmig im Ortsraum
 \Rightarrow konstant im Impulsraum

Im Allgemeinen hängen Selbstenergien aber vom Impuls ab, z.B. oder ~~photon~~ in der QED,

- Problem: Das Integral ist divergent.

einfache Abschätzung: „oberflächlicher Divergenzgrad“
(stimmt nicht immer)

$$\left. \begin{array}{l} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sim \Lambda^4 \rightsquigarrow D = +4 \\ D_0(k) \sim \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow D = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcirc : D = 4 - 2 = 2 \quad \checkmark$$

$$\bigoplus \quad D = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2 \quad \text{ebenfalls quadrat. div.}$$

Das Hinzufügen weiterer Linien lässt in der ϕ^4 -Theorie D unverändert (\rightarrow „renormierbar“)

$$\text{z.B. } \bigcirc \rightarrow \bigoplus \quad \Delta D = +4 - 2 \cdot 2 = 0$$

\uparrow \uparrow
 zus. Loop zwei zus. Prop.

weiteres Vorgehensweise:

1. vorläufige Regularisierung der Integrale durch ein geeignetes Verfahren (z.B. durch Abschneiden des Integrals bei endlichem Λ , das ist aber nicht immer erlaubt, s.u.)
2. Taylor-Entwicklung von $\Sigma(p^2)$ um einen „Renormierungspunkt“ $p^2 = \mu^2$:

$$\Sigma(p^2) = \underbrace{\Sigma(\mu^2)}_{\substack{\text{quadrat. div.} \\ \sim \Lambda^2}} + (p^2 - \mu^2) \underbrace{\Sigma'(\mu^2)}_{\substack{\text{log. div.} \\ \sim \ln \Lambda}} + \underbrace{\tilde{\Sigma}(p^2)}_{\substack{\text{konvergenter Rest} \\ \mathcal{O}((p^2 - \mu^2)^2)}}$$

$$\Rightarrow iD(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2) - (p^2 - \mu^2) \Sigma'(p^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}$$

Renormierungspunkt beliebig. Wähle $m_0^2 + \Sigma(p^2) = \mu^2$

$$\Rightarrow iD(p) = \frac{i}{(p^2 - \mu^2) [1 - \Sigma'(p^2)] - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}$$

↑ verschwindet bei $p^2 = \mu^2$

$\Rightarrow D(p)$ hat einen Pol bei $p^2 = \mu^2$
(so wie D_0 einen Pol bei $p^2 = m_0^2$ hatte)

$\Rightarrow \mu$ ist die physikalische Masse: $\mu \equiv m$!
Nur diese ist observabel, nicht m_0 .

2) Massenrenormierung

$$\boxed{m_0^2 + \Sigma(m^2) = m^2}$$

↑ ↑ ↑
divergent endlich

$\Sigma'(m^2)$, $\tilde{\Sigma}(p^2)$ sind störungstheoretisch
von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda_0)$

$$\Rightarrow \tilde{\Sigma}(p) = [1 - \Sigma'(m^2)] \tilde{\Sigma}(p) + \mathcal{O}(\lambda_0^2)$$

$$\Rightarrow iD(p) = \frac{i Z_\phi}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}$$

mit $Z_\phi := [1 - \Sigma'(m^2) + \mathcal{O}(\lambda_0^2)]^{-1} = 1 + \Sigma'(m^2) + \mathcal{O}(\lambda_0^2)$
"Wellenfunktionsrenormierungskonstante"

Bemerkungen:

- Für $-i\Sigma = \cancel{0} = \text{const.}$ ergibt sich $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma} = 0$

$$\Rightarrow iD(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\hat{=} D_0 \text{ mit } m_0 \rightarrow m)$$

aber das ist wie gesagt ein Sonderfall.

- Für $\mathcal{O}(\lambda_0^2)$ -Korrekturen muss man härter arbeiten.

renormiertes Feld: $\phi := Z_\phi^{-\frac{1}{2}} \phi_0$

2) renormierter Propagator:

$$iD_R(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T(\phi(x) \phi(0)) | \Omega \rangle$$

$$= i Z_\phi^{-1} D(p)$$

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \quad \text{endlich}$$

Beachte:

Wie schon die freie Theorie kann auch die wechselwirkende Theorie die Masse des Teilchens nicht vorhersagen. Sie wird in der Massenrenormierung festgesetzt (ggf. auf einen Messwert). Das Verhalten des Propagators abseits des Poles ist dagegen eine nichttriviale Vorhersage.