

"Korrektur" zur Fermion-Renormierung

Propagator: $S(p) = [p - m - \Sigma(p) + i\varepsilon]^{-1}$

$$p\cancel{p} = p^2 \Rightarrow \Sigma(p) = A(p^2)\cancel{p} + B(p^2) \equiv \bar{\Sigma}(p)$$

$$\frac{d p^2}{d p} = 2\cancel{p}, \quad \frac{d f(p^2)}{d p} = 2 \frac{d f}{d p^2} \cancel{p} = 2 f'(p^2) \cancel{p}$$

$$\hookrightarrow \text{Entwicklung: } \Sigma(p) = \Sigma_0 + \Sigma_1(p-m) + \Sigma_2(p-m)^2 + \dots$$

$$\hookrightarrow \Sigma_0 = \Sigma(p \rightarrow m)$$

$$\Sigma_1 = \left. \frac{d \bar{\Sigma}}{d p} \right|_{p \rightarrow m}$$

Renormierungsbedingungen:

Pol und Residuum unverändert

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma(p \rightarrow m) = 0, \quad \left. \frac{d \bar{\Sigma}}{d p} \right|_{p \rightarrow m} = 0} \quad (*)$$

(s. auch Peskin & Schroeder, Weinberg, ...)

$$\bar{\Sigma}(p) = A(p^2)\cancel{p} + B(p^2)$$

$$\Rightarrow \bar{\Sigma}(p \rightarrow m) = A(m^2)m + B(m^2)$$

$$\left. \frac{d \bar{\Sigma}}{d p} \right|_{p \rightarrow m} = \left(A(p^2) + 2A'(p^2)p^2 + 2B'(p^2)\cancel{p} \right) \Big|_{p \rightarrow m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A(m^2)m + B(m^2) &\stackrel{!}{=} 0 \\ A(m^2) + 2B'(m^2)m + 2A'(m^2)m^2 &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}}$$

Unsere bisherige Vorschrift $A(\mu^2) = B(\mu^2) = 0$ entspricht einem anderen Renormierungsschema, das zwar ebenfalls den Pol des Propagators unverschoben lässt, im obigen Sinne aber ein anderes Residuum liefert. Ein ähnliches Schema wird manchmal in der nicht-perturbativen QCD angewendet, bei der Entwicklungen um „physikalische“ Quarkmassen keinen Sinn machen, da Quarks nicht als freie Teilchen beobachtet werden („Confinement“). Dort fordert man daher manchmal

$$S^{-1}(p) \Big|_{p^2 = v^2} = (\not{p} - m) \Big|_{p^2 = v^2}$$

an einem beliebigen Renormierungspunkt v^2 .

Im Folgenden werden wir das Schema (*) verwenden.

IX.3 Ein-loop-Renormierung der QED

1.) Elektron-Selbstenergie

$$-i \Sigma(p) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$\text{diagram 1: } \text{fermion line } \leftarrow \text{photon loop } \rightarrow$
 $\text{diagram 2: } \text{fermion line } \leftarrow \text{ghost loop } \rightarrow$

$$= -i \Sigma_{\text{loop}}(p) - i \Sigma_{\text{CT}}(p)$$

$$-i \Sigma_{\text{CT}}(p) = i(\delta_2 p - \delta m)$$

$$-i \Sigma_{\text{loop}}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{k + \not{p} + m}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

kleine fiktive Photonmasse
 zur Regularisierung von
 Infrarot-Divergenzen (s.u.)

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \not{a} \gamma^\nu g_{\mu\nu} &= a_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma_\mu \\ &= a_\alpha (-\gamma^\alpha \gamma^\mu + \{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\}) \gamma_\mu \\ &= -\not{a} \gamma^\mu \gamma_\mu + a_\alpha 2g^{\alpha\mu} \gamma_\mu \\ &= -4\not{a} + 2\not{a} = -2\not{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{\text{loop}}(p) = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(k+p) - 4m}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

Feynman-Parameter-Integral:

$$\frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot px + p^2 x - m^2 x - \mu^2(1-x) + i\epsilon]^2}$$

2) $l := k + px$ bruft nicht bei

$$\Rightarrow \Sigma_{\text{loop}}(p) = ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2l + 2p(1-x) - 4m}{[l^2 + p^2 x(1-x) - m^2 x - \mu^2(1-x) + i\epsilon]^2}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{loop}^{(p)} = ie^2 \int_0^1 dx [2p(1-x) - 4m] \times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 + p^2 x(1-x) - m^2 - \mu^2(1-x) + i\epsilon]^2}$$

Wick-Rot. : $l_4 = il_0$

$$= e^2 \int_0^1 dx [4m - 2p(1-x)] \times \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + m^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x) - i\epsilon]^2}$$

$$\equiv e^2 \int_0^1 dx [4m - 2p(1-x)] \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta(x) - i\epsilon]^2}$$

mit $\Delta(x) = m^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x)$

Bemerkungen:

- Das l_E -Integral ist - wie erwartet - logarithmisch divergent und muss regularisiert werden.
- Wenn p^2 groß genug ist, kann $\Delta(x)$ negativ werden, und der Integrand bekommt einen Pol. Wir haben die ϵ -Vorschrift daher auch nach der Wick-Rotation beibehalten.

Dann tritt der Pol auf?

$l_E^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta(x)$ muss negativ werden

$$0 \leq x \leq 1 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta(0) = p^2 \\ \Delta(1) = m^2 \end{array} \right\} > 0$$

\Rightarrow Suche Minimum

$$\frac{d\Delta}{dx} = m^2 - \mu^2 - p^2 + 2px \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{p^2 - m^2 + \mu^2}{2p^2} = \frac{1}{2} - \frac{m^2 - \mu^2}{2p^2}$$

$$\Rightarrow 1 - x_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{m^2 - \mu^2}{2p^2}$$

2, $0 \leq x_{\min} \leq 1$, falls $p^2 \geq m^2 - \mu^2$

$$\Delta_{\min} = m^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2 - \mu^2}{2p^2} \right) + \mu^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{m^2 - \mu^2}{2p^2} \right) - p^2 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{m^2 - \mu^2}{2p^2} \right)^2 \right)$$

= ...

$$= -\frac{1}{4p^2} \left[\underbrace{p^2 - (m - \mu)^2} \right] \left[p^2 - (m + \mu)^2 \right]$$

≥ 0 für $0 \leq x_{\min} \leq 1$

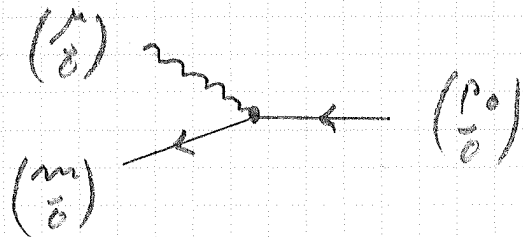
$$(\Rightarrow p^2 \geq m^2 - \mu^2 = (m + \mu)(m - \mu) \geq (m - \mu)^2)$$

$\Rightarrow \Delta_{\min} < 0$, falls $p^2 > (m + \mu)^2$

Ruhezustand des virtuellen Elektrons:

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \Delta_{\min} < 0, \text{ falls } p_0 > m + \mu$$

d. h. der Pol tritt auf, wenn die Energie ausreicht, ein reelles Elektron-Photon-Paar zu erzeugen



weitere Auswertung:

i) Pauli - Villars - Regularisierung

$$\int \frac{d^4 l_\epsilon}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_\epsilon^2 + \Delta - i\epsilon]^2} \rightarrow \int \frac{d^4 l_\epsilon}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{[l_\epsilon^2 + \Delta - i\epsilon]^2} - \frac{1}{[l_\epsilon^2 + \Delta_\Lambda - i\epsilon]^2} \right)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dl_\epsilon^2 \left(\frac{l_\epsilon^2}{[l_\epsilon^2 + \Delta - i\epsilon]^2} - \frac{l_\epsilon^2}{[l_\epsilon^2 + \Delta_\Lambda - i\epsilon]^2} \right)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\Delta_\Lambda - i\epsilon}{\Delta - i\epsilon} \right)$$

mit $\Delta_\Lambda = \Lambda^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x)$

Für $\Lambda \gg p^2, \mu^2$ können wir $\Delta_\Lambda = \Lambda^2 x$ setzen und $-i\epsilon$ im Zähler weglassen.

$$\Rightarrow \Sigma_{loop}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx [2m - p(1-x)] \ln \left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x) - i\epsilon} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}$$

Für $\Delta(x) < 0$ bekommt der Logarithmus einen endlichen Imaginärteil, dessen Vorzeichen von der Wahl der $i\epsilon$ -Vorschrift abhängt (hier also negativ). Die Selbstenergie bekommt dabei ebenfalls einen negativen Imaginärteil für $p^2 > (\mu + p)^2$ mit einem Schnitt („branch cut“) entlang der reellen p^2 -Achse.

Im $\Sigma \equiv \text{Im } \Sigma_{loop}$ hängt nicht von Λ ab und ist daher auch für $\Lambda \rightarrow \infty$ endlich.

Hinzufügen der Counter-Terme:

$$\Sigma(p) = \Sigma_{\text{Loop}}(p) + \Sigma_{\text{CT}}(p)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx [2m - p(1-x)] \ln \left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x) - i\epsilon} \right) - \delta_2 p + \delta m$$

$$\Rightarrow \Sigma|_{p \rightarrow m} = \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^1 dx [2 - (1-x)] \ln \left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} \right) - \delta_2 m + \delta m$$

↑
-iε kann hier weggelassen werden

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \delta m = -\frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^1 dx \dots + \delta_2 m$$

(Vorsicht beim Vergleich mit Peskin Schwedler, Kap. 7.1:

- Wir haben die Impulse im Loop anders zugeordnet $\hat{=} x \leftrightarrow 1-x$
- P.S. haben μ durch die Regulator-Masse ersetzt, wir $m \Rightarrow \Lambda^2 x$ in beiden Fällen
- Im P.S. Kap. 7 wurden noch keine Counter-Terme verwendet und $\delta m = m - m_0$ definiert. Bei uns ist stattdessen $\delta m = 2\epsilon m_0 - m = (1 + \delta_2) m_0 - m \approx m_0 - m + \delta_2 m$

$$\Rightarrow \delta m - \delta_2 m \hat{=} -\delta m_{\text{PS, Kap 7.1}} \quad \checkmark$$