# Eichinvarianz der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $\psi$: Dirac-Feld
  - Massenterm: $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ ✓
  - Ableitungsterm problematisch

→ Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$

# Eichinvarianz der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $\psi$: Dirac-Feld
  - Massenterm: $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ ✓
  - Ableitungsterm problematisch

→ Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$

- Ansatz: $n^\mu D_\mu\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon n) - U(x+\varepsilon n, x)\psi(x)\right]$
  - $U(y,x) \to e^{i\alpha(y)}U(y,x)e^{-i\alpha(x)}$
  - $U(x+\varepsilon n, x) = 1 - i\varepsilon n^\mu e\,A_\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\quad e\,A_\mu(x) = i\frac{\partial U(y,x)}{\partial y^\mu}\Big|_{y=x}$

$\Rightarrow$ $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$, $\quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$

# Eichinvarianz der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $\psi$: Dirac-Feld
  - Massenterm: $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ ✓
  - Ableitungsterm problematisch

➞ Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$

- Ansatz: $n^\mu D_\mu\psi(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon n) - U(x+\varepsilon n, x)\psi(x)\right]$
  - $U(y,x) \to e^{i\alpha(y)}U(y,x)e^{-i\alpha(x)}$
  - $U(x+\varepsilon n, x) = 1 - i\varepsilon n^\mu e\,A_\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\quad e\,A_\mu(x) = i\frac{\partial U(y,x)}{\partial y^\mu}\Big|_{y=x}$

$\Rightarrow$ $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$, $\quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$

- Feldstärketensor: $[D_\mu, D_\nu] = ie\left[(\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu)\right] \equiv ie\,F_{\mu\nu}$
  - $[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \;\Rightarrow\; F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$

# Eichinvarianz der QED

- Eichinvariante Bausteine: $\overline{\psi}\psi, \quad \overline{\psi}D_\mu^n\psi, \quad F_{\mu\nu}$
- Forderungen an die Lagrangedichte:
  - eichinvariant
  - Lorentz-Skalar
  - renormierbar

$\Rightarrow \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{QED}} + \mathscr{L}_{\text{CP}}$

  - $\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
  - $\mathscr{L}_{\text{CP}} \propto \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} \propto \vec{E}\cdot\vec{B}$
    - bricht $P$ und $T$
    - trägt nicht zur Wirkung bei

# Yang-Mills-Theorie



- Dublett aus zwei Dirac-Feldern: $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$
- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \to V(x)\psi(x)$, $V(x) = \exp\left(i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$
  - $V^\dagger V = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{\psi}(x)\psi(x)$ invariant
  - Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu \psi(x) \to V(x) D_\mu \psi(x)$

# Yang-Mills-Theorie



- Dublett aus zwei Dirac-Feldern: $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$
- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \to V(x)\psi(x)$, $V(x) = \exp\left(i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$
  - $V^\dagger V = \mathbb{1} \Rightarrow \overline{\psi}(x)\psi(x)$ invariant
  - Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu \psi(x) \to V(x) D_\mu \psi(x)$
- Analoge Vorgehensweise wie in der QED mit
  - $U(y, x) \to V(y)U(y, x)V^\dagger(x)$
  - $U(x + \varepsilon n, x) = \mathbb{1} + i\varepsilon n^\mu g A^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad D_\mu = \partial_\mu - igA^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2}$,
  - $A^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2} \to V(x)\left[A^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\right]V^\dagger(x)$

    infinitesimale Transformation: $V(x) = 1 + i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$

    $\Rightarrow \vec{A}_\mu \to \vec{A}_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu \vec{\alpha}) - \vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu$

# Yang-Mills-Theorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dublett aus zwei Dirac-Feldern: $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$
- Forderung: Invarianz unter $\psi(x) \to V(x)\psi(x), \quad V(x) = \exp\left(i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$
  - $V^\dagger V = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{\psi}(x)\psi(x)$ invariant
  - Suche kovariante Ableitung mit $D_\mu \psi(x) \to V(x) D_\mu \psi(x)$
- Analoge Vorgehensweise wie in der QED mit
  - $U(y, x) \to V(y) U(y, x) V^\dagger(x)$
  - $U(x + \varepsilon n, x) = \mathbb{1} + i\varepsilon n^\mu g A^j_\mu(x) \frac{\sigma^j}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad D_\mu = \partial_\mu - igA^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2},$
  - $A^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2} \to V(x)\left[A^j_\mu(x)\frac{\sigma^j}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\right] V^\dagger(x)$

    infinitesimale Transformation: $V(x) = 1 + i\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$

    $\Rightarrow \quad \vec{A}_\mu \to \vec{A}_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu \vec{\alpha}) - \vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu$
- Feldstärketensor: $[D_\mu, D_\nu] = -ig\, G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2}, \quad G^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g\epsilon^{ijk} A^i_\mu A^j_\nu$