I. Einführung und Grundlagen:
Wieso Quantenfeldtheorie?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

I.1 (Relativistische) Quantenfeldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- vereinen Konzepte der
  - Quantentheorie
  - Feldtheorie
  - (speziellen Relativitätstheorie)

I.1 (Relativistische) Quantenfeldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- vereinen Konzepte der
  - Quantentheorie
  - Feldtheorie
  - (speziellen Relativitätstheorie)

→ Basis des *Standardmodells der Elementarteilchenphysik*

  - Konzepte finden auch Anwendung in:

    Kernphysik, Atomphysik, Festkörperphysik, Astrophysik
    (häufig als nicht-relativistische QFT)

I.1 (Relativistische) Quantenfeldtheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- vereinen Konzepte der
  - Quantentheorie
  - Feldtheorie
  - (speziellen Relativitätstheorie)

→ Basis des *Standardmodells der Elementarteilchenphysik*

- Konzepte finden auch Anwendung in:

  Kernphysik, Atomphysik, Festkörperphysik, Astrophysik
  (häufig als nicht-relativistische QFT)

- schematisch:

$$\begin{array}{ccc} \text{klass. Mechanik} & \xrightarrow{\textit{Feldtheorie}} & \text{z.B. klass. Elektrodynamik} \\ \text{Quantisierung} \downarrow & & \downarrow \\ \text{Quantenmechanik} & \longrightarrow & \text{z.B. Quanten-Elektrodynamik} \end{array}$$

Klassische Theorien

- klassische Mechanik
  - Punkt-Teilchen mit Fern-Wechselwirkung $\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}')$
    z.B. Planetensystem mit Gravitationskraft,
    geladene Teilchen mit Coulomb-Wechselwirkung
  - Potenziale $V(\vec{r}, t)$: rein technische Begriffe

Klassische Theorien

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- klassische Mechanik
  - Punkt-Teilchen mit Fern-Wechselwirkung $\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}')$
    z.B. Planetensystem mit Gravitationskraft,
    geladene Teilchen mit Coulomb-Wechselwirkung
  - Potenziale $V(\vec{r}, t)$: rein technische Begriffe
- klassische Elektrodynamik
  - geladene Teilchen wechselwirken über Felder ($\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$)
  - $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind „reale” Größen, die ein „Eigenleben” führen:
    elektromagnet. Wellen (Licht!)
  - Potenziale $\phi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$: hängen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zusammen,
    sind aber *eichabhängig* $\rightarrow$ keine reale Bedeutung
  - Theorie ist „von Natur aus” (speziell) relativistisch

Klassische Theorien

- klassische Mechanik
  - Punkt-Teilchen mit Fern-Wechselwirkung $\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}')$
    z.B. Planetensystem mit Gravitationskraft,
    geladene Teilchen mit Coulomb-Wechselwirkung
  - Potenziale $V(\vec{r}, t)$: rein technische Begriffe
- klassische Elektrodynamik
  - geladene Teilchen wechselwirken über Felder ($\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$)
  - $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind „reale" Größen, die ein „Eigenleben" führen:
    elektromagnet. Wellen (Licht!)
  - Potenziale $\phi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$: hängen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zusammen,
    sind aber *eichabhängig* $\rightarrow$ keine reale Bedeutung
  - Theorie ist „von Natur aus" (speziell) relativistisch
- Allgemeine Relativitätstheorie
  - klassische Feldtheorie der Gravitation
  - Felder: Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ $\rightarrow$ Gravitationswellen

Quantentheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantenmechanik
  - Welle-Teilchen-Dualismus $\rightarrow$ Wellenfunktion für die Materie-Teilchen
  - Wechselwirkungspotenziale werden (weitgehend) unverändert aus der klassischen Theorie übernommen.

  Bsp.: Schrödinger-Gl. für das Wasserstoff-Atom
  ($\rightarrow$ keine Quantisierung des Coulomb-Feldes)
  - relativist. QM: Widersprüche, die erst in der QFT aufgehoben werden (s.u.)

Quantentheorien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantenmechanik
  - Welle-Teilchen-Dualismus → Wellenfunktion für die Materie-Teilchen
  - Wechselwirkungspotenziale werden (weitgehend) unverändert aus der klassischen Theorie übernommen.

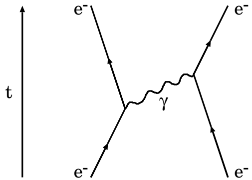
Bsp.: Schrödinger-Gl. für das Wasserstoff-Atom
(→ keine Quantisierung des Coulomb-Feldes)

  - relativist. QM: Widersprüche, die erst in der QFT aufgehoben werden (s.u.)
- Quantenfeldtheorie
  - symmetrische Beschreibung von Materie und Wechselwirkung durch *quantisierte Felder*
  - Welle-Teilchen-Dualismus:
    Wechselwirkung durch Austausch von (virtuellen) Teilchen

Beispiel: Quantenelektrodynamik (QED)

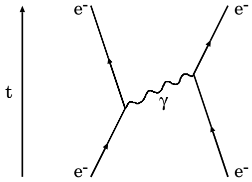
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektronen wechselwirken durch den Austausch von Photonen.



Beispiel: Quantenelektrodynamik (QED)

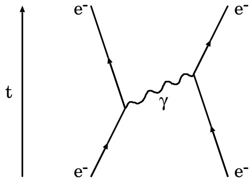
- Elektronen wechselwirken durch den Austausch von Photonen.
- Felder:
  - Elektronfeld $\psi(x)$
  - Photonfeld $A^{\mu}(x)$ = quantisiertes Viererpotential (Photon = „Eichboson" der QED)



Beispiel: Quantenelektrodynamik (QED)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektronen wechselwirken durch den Austausch von Photonen.
- Felder:
  - Elektronfeld $\psi(x)$
  - Photonfeld $A^\mu(x)$ = quantisiertes Viererpotential (Photon = „Eichboson" der QED)

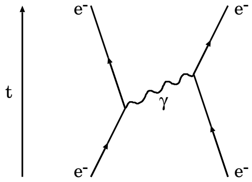


→ Das „Eichfeld" A^μ ist nicht bloß eine technische Hilfsgröße zur Berechnung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$, sondern hat fundamentale Bedeutung!

Beispiel: Quantenelektrodynamik (QED)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektronen wechselwirken durch den Austausch von Photonen.
- Felder:
  - Elektronfeld $\psi(x)$
  - Photonfeld $A^\mu(x)$ = quantisiertes Viererpotential (Photon = „Eichboson" der QED)



→ Das „Eichfeld" A^μ ist nicht bloß eine technische Hilfsgröße zur Berechnung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$, sondern hat fundamentale Bedeutung!

- Die QED ist von vornherein relativistisch.

QED: einige Highlights

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

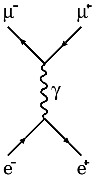
- Vorhersage „neuer” Prozesse:

QED: einige Highlights

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vorhersage „neuer" Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

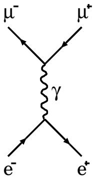
    z.B. $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$

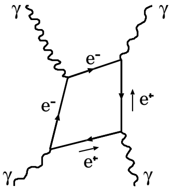


QED: einige Highlights

- Vorhersage „neuer” Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung”: $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$



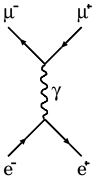


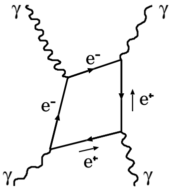
QED: einige Highlights

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vorhersage „neuer" Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung": $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$



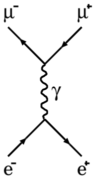


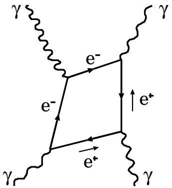
- anomale magnetische Momente von Elektron und Myon:
  - $\mu_i = g_i\, s\, \mu_B, \quad s = \frac{1}{2}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m}$

QED: einige Highlights

- Vorhersage „neuer” Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung”: $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$



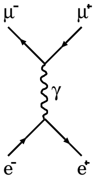


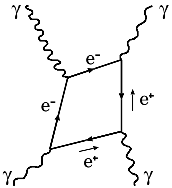
- anomale magnetische Momente von Elektron und Myon:
  - $\mu_i = g_i\, s\, \mu_B, \quad s = \frac{1}{2}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m}$
  - Dirac: $g_i = 2$

QED: einige Highlights

- Vorhersage „neuer” Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung”: $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$





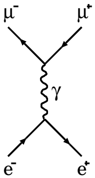
- anomale magnetische Momente von Elektron und Myon:
  - $\mu_i = g_i\, s\, \mu_B, \quad s = \frac{1}{2}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m}$
  - Dirac: $g_i = 2$
  - experimentell: $\frac{g_e - 2}{2} = (1,159\,652\,180\,73 \pm 0,000\,000\,000\,28) \cdot 10^{-3}$
  - QED+: $\frac{g_e - 2}{2} = (1,159\,652\,181\,64 \pm 0,000\,000\,000\,76) \cdot 10^{-3}$

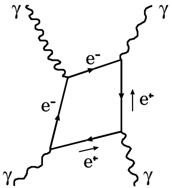
QED: einige Highlights

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vorhersage „neuer” Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung”: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$



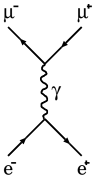


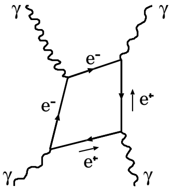
- anomale magnetische Momente von Elektron und Myon:
  - $\mu_i = g_i \, s \, \mu_B, \quad s = \frac{1}{2}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m}$
  - Dirac: $g_i = 2$
  - experimentell: $\frac{g_\mu - 2}{2} = (1,165\,920\,9 \pm 0,000\,000\,6) \cdot 10^{-3}$
  - QED+: $\frac{g_\mu - 2}{2} = (1,165\,918\,0 \pm 0,000\,000\,5) \cdot 10^{-3}$

QED: einige Highlights

- Vorhersage „neuer” Prozesse:
  - Teilchen-Antiteilchen-Annihilation

    z.B. $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$
  - „Licht-Licht-Streuung”: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$





- anomale magnetische Momente von Elektron und Myon:
  - $\mu_i = g_i\, s\, \mu_B, \quad s = \frac{1}{2}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m}$
  - Dirac: $g_i = 2$
  - experimentell: $\frac{g_\mu - 2}{2} = (1,165\,920\,9 \pm 0,000\,000\,6) \cdot 10^{-3}$
  - QED+: $\frac{g_\mu - 2}{2} = (1,165\,918\,0 \pm 0,000\,000\,5) \cdot 10^{-3}$

    ➞ Physik jenseits des Standard-Modells ??? (unwahrscheinlich ...)

Standard-Modell

- Beschreibung der Wechselwirkungen (ohne Gravitation) zwischen den elementaren Fermionen (Quarks und Leptonen) als *Eichtheorien* zu unterschiedlichen *Symmetriegruppen*:

Wechselwirkung	elektromagn.	schwach	stark
Eichgruppe	$U(1)$	$(SU(2))$	$SU(3)$
Eichbosonen	γ	W^+, W^-, Z^0	8 Gluonen
Theorie	QED		QCD
	elektroschwache WW: $U(1) \times SU(2)$		

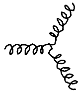
Standard-Modell

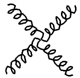
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beschreibung der Wechselwirkungen (ohne Gravitation) zwischen den elementaren Fermionen (Quarks und Leptonen) als *Eichtheorien* zu unterschiedlichen *Symmetriegruppen*:

Wechselwirkung	elektromagn.	schwach	stark
Eichgruppe	$U(1)$	$(SU(2))$	$SU(3)$
Eichbosonen	γ	W^+, W^-, Z^0	8 Gluonen
Theorie	QED		QCD
	elektroschwache WW: $U(1) \times SU(2)$		

- $SU(2)$, $SU(3)$: nicht-abelsche Eichgruppen
  - → Eichbosonen tragen Ladung
  - → Eichbosonen wechselwirken untereinander



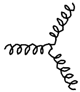


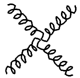
Standard-Modell

- Beschreibung der Wechselwirkungen (ohne Gravitation) zwischen den elementaren Fermionen (Quarks und Leptonen) als *Eichtheorien* zu unterschiedlichen *Symmetriegruppen*:

Wechselwirkung	elektromagn.	schwach	stark
Eichgruppe	$U(1)$	$(SU(2))$	$SU(3)$
Eichbosonen	γ	W^{+}, W^{-}, Z^{0}	8 Gluonen
Theorie	QED		QCD
	$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{elektroschwache WW: } U(1)\times SU(2)}$		

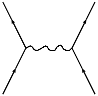
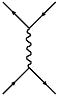
- $SU(2)$, $SU(3)$: nicht-abelsche Eichgruppen
  - → Eichbosonen tragen Ladung
  - → Eichbosonen wechselwirken untereinander



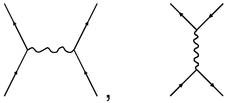


- diese Vorlesung: hauptsächlich QED

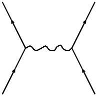
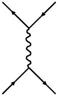
Feynman-Diagramme

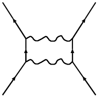
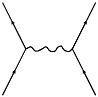
-  ,  …

Feynman-Diagramme

-  ...
- nicht nur Veranschaulichung von Prozessen,
  sondern konkrete Rechenregeln zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten, Zerfallsraten etc.

Feynman-Diagramme

-  ,  ...
- nicht nur Veranschaulichung von Prozessen,
  sondern konkrete Rechenregeln zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten, Zerfallsraten etc.
- basieren auf einer störungstheoretischen Entwicklung:

z.B.  ist von höherer Ordnung als 

Ziele der Vorlesung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Verständnis der grundlegenden Konzepte der QFT:
  - Quantisierung relativistischer Felder (Bosonen mit Spin 0, Fermionen, Photonen)
  - Symmetrien und Erhaltungsgrößen
  - wechselwirkende Felder
  - Streuprozesse (Wirkungsquerschnitt, Übergangsmatrixelemente, Streumatrix)
- Erlernen von Techniken zur Berechnung einfacher Prozesse
  - Feynman-Regeln
  - „Rechentricks"

I.2 Maßeinheiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

I.2 Maßeinheiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\rightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch → „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \hbar c = 197{,}33\ \mathrm{MeV\,fm} = 1$

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch → „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \; \hbar c = 197{,}33\ \mathrm{MeV\,fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \mathrm{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \mathrm{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \mathrm{fm}^{-1} = 197{,}33\ \mathrm{MeV}$

I.2 Maßeinheiten

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \hbar c = 197{,}33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197{,}33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \; \hbar c = 197{,}33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197{,}33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

  - [Energie] = [Masse] = [Impuls] = 1 MeV

I.2 Maßeinheiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \hbar c = 197,33\ \text{MeV}\,\text{fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197,33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197,33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1,6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

  - [Energie] = [Masse] = [Impuls] = 1 MeV
  - [Länge] = [Zeit] = 1 MeV^{-1}

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten“: $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \quad \hbar c = 197,33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197,33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197,33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1,6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

  - [Energie] = [Masse] = [Impuls] = 1 MeV
  - [Länge] = [Zeit] = 1 MeV^{-1}
  - [Geschwindigkeit] = $\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right] = 1$ (vgl. $c = 1$)

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \quad \hbar c = 197{,}33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197{,}33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

  - [Energie] = [Masse] = [Impuls] = 1 MeV
  - [Länge] = [Zeit] = 1 MeV^{-1}
  - [Geschwindigkeit] = $\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right] = 1$ (vgl. $c = 1$)
  - [Wirkung] = [Energie · Zeit] = 1 (vgl. $\hbar = 1$)

I.2 Maßeinheiten

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten": $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \; \hbar c = 197{,}33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197{,}33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

- $[\text{Energie}] = [\text{Masse}] = [\text{Impuls}] = 1\ \text{MeV}$
- $[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = 1\ \text{MeV}^{-1}$
- $[\text{Geschwindigkeit}] = \left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right] = 1 \quad (\text{vgl. } c = 1)$
- $[\text{Wirkung}] = [\text{Energie} \cdot \text{Zeit}] = 1 \quad (\text{vgl. } \hbar = 1)$
- $[\text{Wirkungsquerschnitt}] = [\text{Fläche}] = [\text{Länge}]^2 = 1\ \text{MeV}^{-2}$

I.2 Maßeinheiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- SI-Einheiten oft unpraktisch $\longrightarrow$ „natürliche Einheiten”: $\hbar = c = 1$

  $\Rightarrow \hbar c = 197{,}33\ \text{MeV fm} = 1$

  $\Leftrightarrow \quad 1\ \text{MeV}^{-1} = 197{,}33\ \text{fm} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{fm}^{-1} = 197{,}33\ \text{MeV}$

$\longrightarrow$ nur eine verbleibende Einheit, z.B. 1 MeV $(= 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J})$

  - [Energie] = [Masse] = [Impuls] = 1 MeV
  - [Länge] = [Zeit] = 1 MeV^{-1}
  - [Geschwindigkeit] = $\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\right] = 1$ (vgl. $c = 1$)
  - [Wirkung] = [Energie · Zeit] = 1 (vgl. $\hbar = 1$)
  - [Wirkungsquerschnitt] = [Fläche] = $[\text{Länge}]^2 = 1\ \text{MeV}^{-2}$

- Ladungen sind i.A. dimensionslose „Kopplungskonstanten” (s. später)
  - z.B. Coulomb-Potential $\phi = \frac{Q}{4\pi r} \Rightarrow [Q] = [\phi\, r] = 1$

Umrechnung in physikalische Einheiten

- Am Ende der Rechnung führt man ggf. entsprechende Potenzen von $\hbar$ und c ein, um zu den gewünschten physikalischen Einheiten zurückzukommen.
- Beispiel:

$$\sigma = a\,\mathrm{MeV}^{-2} = a\,\mathrm{MeV}^{-2}\,(\hbar c)^2 = a\,\mathrm{MeV}^{-2}(197{,}33\ \mathrm{MeV\,fm})^2 = a\,(197{,}33)^2\ \mathrm{fm}^2$$

I.3 Relativistische Notation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

I.3 Relativistische Notation

- $x \equiv (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ (griechische Indizes: $\mu = 0, \ldots, 3$)

I.3 Relativistische Notation

- $x \equiv (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ (griechische Indizes: $\mu = 0, \ldots, 3$)

  $\vec{x} = (x^i) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ (lateinische Indizes: $i = 1, 2, 3$)

I.3 Relativistische Notation

- $x \equiv (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ (griechische Indizes: $\mu = 0, \ldots, 3$)

  $\vec{x} = (x^i) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ (lateinische Indizes: $i = 1, 2, 3$)

- $(x_\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

I.3 Relativistische Notation

- $x \equiv (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ (griechische Indizes: $\mu = 0, \ldots, 3$)

  $\vec{x} = (x^i) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ (lateinische Indizes: $i = 1, 2, 3$)

- $(x_\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

- $x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu}\, x^\nu \equiv g_{\mu\nu}\, x^\nu$, metrischer Tensor: $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(„Westcoast-Konvention")

Lorentz-Transformationen

- Lorentz-Transformationen (Boosts, Rotationen, Raum- und Zeitspiegelung):

  $$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \qquad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu$$

Lorentz-Transformationen

- Lorentz-Transformationen (Boosts, Rotationen, Raum- und Zeitspiegelung):

  $$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \quad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu$$

- kontravarianter (kovarianter) Vierervektor:

  4-komponentige Größe, die sich genauso transformiert wie x^μ (x_μ)

Lorentz-Transformationen

- Lorentz-Transformationen (Boosts, Rotationen, Raum- und Zeitspiegelung):

  $$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu, \qquad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu$$

- kontravarianter (kovarianter) Vierervektor:

  4-komponentige Größe, die sich genauso transformiert wie x^μ (x_μ)

- Ableitungen:

  $$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ transformiert sich kovariant!

  $$(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ transformiert sich kontravariant! ($\to$ Übung)

Lorentz-Transformationen

- Lorentz-Transformationen (Boosts, Rotationen, Raum- und Zeitspiegelung):

  $$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}, \quad x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, x_{\nu}$$

- kontravarianter (kovarianter) Vierervektor:

  4-komponentige Größe, die sich genauso transformiert wie x^{μ} (x_{μ})

- Ableitungen:

  $$(\partial_{\mu}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ transformiert sich kovariant!

  $$(\partial^{\mu}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ transformiert sich kontravariant! (→ Übung)

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a_{\mu}\, b^{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\mu}\, b^{\nu}$ Lorentz-invariant

Lorentz-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lorentz-Transformationen (Boosts, Rotationen, Raum- und Zeitspiegelung):

  $$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu, \qquad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu$$

- kontravarianter (kovarianter) Vierervektor:

  4-komponentige Größe, die sich genauso transformiert wie x^μ (x_μ)

- Ableitungen:

  $$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \text{transformiert sich kovariant!}$$

  $$(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \text{transformiert sich kontravariant!} \qquad (\to \text{Übung})$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b \equiv a_\mu \, b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu \, b^\nu$ Lorentz-invariant

  insbesondere: $x'_\mu \, x'^\mu \stackrel{!}{=} x_\mu \, x^\mu \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\mu{}^\alpha \, \Lambda^\mu{}_\beta = g^\alpha{}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ ($\to$ Übung)

I.4 Kurzrückblick auf relevante physikalische Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

I.4.1 Klassische Mechanik

I.4.1 Klassische Mechanik

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$

I.4.1 Klassische Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$
- Lagrange-Funktion; $L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$

I.4.1 Klassische Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$
- Lagrange-Funktion; $L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$

I.4.1 Klassische Mechanik

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$
- Lagrange-Funktion; $\quad L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$
- Wirkung: $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$
- Hamilton'sches Prinzip: $\quad \delta S = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}$$

I.4.1 Klassische Mechanik

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$
- Lagrange-Funktion; $L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$
- Wirkung: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$
- Hamilton'sches Prinzip: $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}$$

- kanonisch konjugierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

I.4.1 Klassische Mechanik

- n Punktmassen mit generalisierten Koordinaten $q_k(t)$
- Lagrange-Funktion; $\quad L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$
- Wirkung: $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$
- Hamilton'sches Prinzip: $\quad \delta S = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}$$

- kanonisch konjugierte Impulse: $\quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
- Hamilton-Funktion: $\quad H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Viererpotenzial: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Viererpotenzial: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Viererpotenzial: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

  elektrische und magnetische Felder: $F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$

  mit $\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad (i,j,k) \quad \text{zyklische Permutation von} \quad (1,2,3) \\ -1 & \qquad\qquad\qquad\quad \text{antizykl.} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

- Viererpotenzial: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

  elektrische und magnetische Felder: $F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$

  mit $\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{antizykl.} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$
- Vierer- (Ladungs-) Strom: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

I.4.2 Elektrodynamik (kovariante Notation)

- Viererpotenzial: $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

  elektrische und magnetische Felder: $F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$

  mit $\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{antizykl.} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$
- Vierer- (Ladungs-) Strom: $(j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
  - „dualer Feldstärketensor": $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$
  - $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ anlog zu ϵ^{ijk} mit $\epsilon^{0123} = +1$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  → hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}$, $\quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  $\rightarrow$ hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}, \quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

- nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  → hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}, \quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

- nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$

→ Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\,\psi(t, \vec{r}) \equiv \left(-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^{\,2} + V\right)\psi(t, \vec{r}) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \vec{r})$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  → hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}$, $\quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

- nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$

→ Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\,\psi(t,\vec{r}) \equiv \left(-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^{\,2} + V\right)\psi(t,\vec{r}) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r})$

- etwas formaler:
  - Hilbert-Raum-Zustand $|\psi(t)\rangle$

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  → hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}$, $\quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

- nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$

→ Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\,\psi(t,\vec{r}) \equiv \left(-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^{\,2} + V\right)\psi(t,\vec{r}) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r})$

- etwas formaler:
  - Hilbert-Raum-Zustand $|\psi(t)\rangle$
  - Ortsraum-Darstellung: $\psi(t,\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi(t)\rangle$, wobei $\hat{\vec{x}}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$

    (Impulsraumdarstellung analog)

I.4.3 Nichtrelativistische Quantenmechanik

- Welle-Teilchen-Dualismus:

  ebene Welle $\psi(t,\vec{r}) \sim e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

  $\hat{=}$ Teilchen mit Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k} \equiv \vec{k}$ und Energie $\vec{E} = \hbar\omega \equiv \omega$

  → hermitesche Operatoren: $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \equiv -i\vec{\nabla}, \quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$

- nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V$

→ Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\,\psi(t,\vec{r}) \equiv \left(-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^{\,2} + V\right)\psi(t,\vec{r}) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r})$

- etwas formaler:
  - Hilbert-Raum-Zustand $|\psi(t)\rangle$
  - Ortsraum-Darstellung: $\psi(t,\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi(t)\rangle$, wobei $\hat{\vec{x}}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$

    (Impulsraumdarstellung analog)
  - kanonische Quantisierung: $[\hat{x}_m, \hat{p}_n] = i\hbar\,\delta_{mn} \equiv i\delta_{mn}$

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle \psi_1 | \hat{\mathcal{O}} | \psi_2 \rangle$, $\quad \hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle\psi_1|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2\rangle$, $\hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator
- Schrödinger-Bild:
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Zustände zeitabhängig

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle\psi_1|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2\rangle$, $\quad\hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator
- Schrödinger-Bild:
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Zustände zeitabhängig
  - Bewegungs-Gleichung: $\quad H|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle\psi_1|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2\rangle$, $\quad\hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator
- Schrödinger-Bild:
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Zustände zeitabhängig
  - Bewegungs-Gleichung: $\quad H|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$

  $\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1(t)|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|e^{iHt}\,\hat{\mathcal{O}}\,e^{-iHt}|\psi_2(0)\rangle$

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle\psi_1|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2\rangle$, $\quad\hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator
- Schrödinger-Bild:
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Zustände zeitabhängig
  - Bewegungs-Gleichung: $\quad H|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$

  $$\Rightarrow\quad |\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \quad\Rightarrow\quad \langle\psi_1(t)|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|e^{iHt}\,\hat{\mathcal{O}}\,e^{-iHt}|\psi_2(0)\rangle$$
- Heisenberg-Bild:
  - Zustände zeitunabhängig: $\quad |\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$
  - Operatoren zeitabhängig: $\quad \hat{\mathcal{O}}_H(t) = e^{iHt}\,\hat{\mathcal{O}}_S\,e^{-iHt}$

Schrödinger- und Heisenberg-Bild

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Observable $\leftrightarrow$ $\langle\psi_1|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2\rangle$, $\quad \hat{\mathcal{O}}$ = hermitescher Operator
- Schrödinger-Bild:
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Zustände zeitabhängig
  - Bewegungs-Gleichung: $\quad H|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$

  $\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi_1(t)|\,\hat{\mathcal{O}}\,|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|e^{iHt}\,\hat{\mathcal{O}}\,e^{-iHt}|\psi_2(0)\rangle$
- Heisenberg-Bild:
  - Zustände zeitunabhängig: $\quad |\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$
  - Operatoren zeitabhängig: $\quad \hat{\mathcal{O}}_H(t) = e^{iHt}\,\hat{\mathcal{O}}_S\,e^{-iHt}$
  - Bewegungsgleichung: $\quad i\frac{d}{dt}\,\hat{\mathcal{O}}_H(t) = [\hat{\mathcal{O}}_H(t), H]$

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik

i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik

i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}\,^2 + m^2$

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

$\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

  $\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)
- Lösungen: $\Phi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

  $\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)
- Lösungen: $\Phi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- erhaltener Viererstrom: $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*\right)$

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

  $\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)
- Lösungen: $\Phi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- erhaltener Viererstrom: $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*\right)$
- Probleme:

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

  $\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)
- Lösungen: $\Phi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- erhaltener Viererstrom: $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*\right)$
- Probleme:
  - $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$, d.h. auch negative Energien erlaubt

    $\Rightarrow$ Stabilitätsproblem (Spektrum nicht nach unten beschränkt)!

I.4.4 Relativistische Quantenmechanik
i) Klein-Gordon-Gleichung (Spin 0)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freie Teilchen: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- Ersetzung durch Operatoren: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

  $\Rightarrow \quad \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\Phi(x) = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)
- Lösungen: $\Phi(x) \sim e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$
- erhaltener Viererstrom: $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*\right)$
- Probleme:
  - $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$, d.h. auch negative Energien erlaubt

    $\Rightarrow$ Stabilitätsproblem (Spektrum nicht nach unten beschränkt)!
  - $\rho = j^0 < 0$ für $E < 0 \quad \Rightarrow$ keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation!

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit
- Fordere Konsistenz mit relativist. Energie-Impuls-Beziehung

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit
- Fordere Konsistenz mit relativist. Energie-Impuls-Beziehung

$\rightarrow$ $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0$ (Dirac-Gleichung)

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit
- Fordere Konsistenz mit relativist. Energie-Impuls-Beziehung

$\rightarrow$ $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0$ (Dirac-Gleichung)

  - γ^μ: antikommutierende 4×4-Matrizen, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit
- Fordere Konsistenz mit relativist. Energie-Impuls-Beziehung

→ $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0$ (Dirac-Gleichung)

- γ^μ: antikommutierende 4×4-Matrizen, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
- $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ („Dirac-Spinoren”)

ii) Dirac-Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz: partielle Dgl. 1. Ordnung in Ort- und Zeit
- Fordere Konsistenz mit relativist. Energie-Impuls-Beziehung

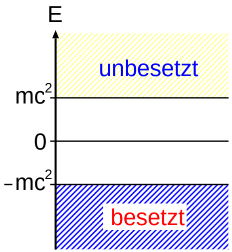
$\rightarrow$ $$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \quad \text{(Dirac-Gleichung)}$$

  - γ^μ: antikommutierende 4×4-Matrizen, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
  - $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ („Dirac-Spinoren")

- Auch hier gibt es Lösungen negativer Energie!

Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

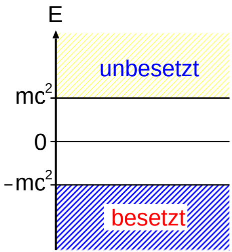


Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See”):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

→ Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

→ stabiler Grundzustand

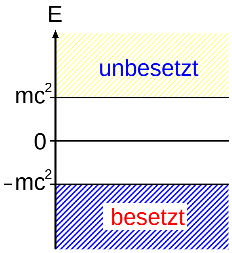


Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand
- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

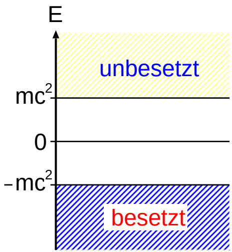


Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand



- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

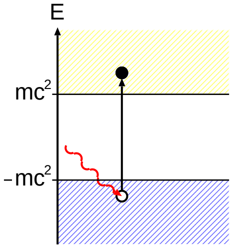
  → Definiere E_{phys} und Q_{phys} *relativ* zum gefüllten Dirac-See.

Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand



- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

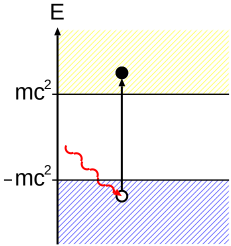
  → Definiere E_{phys} und Q_{phys} *relativ* zum gefüllten Dirac-See.
- Anregung eines Fermions aus dem See in einen Zustand mit $E > 0$:

Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand



- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

  → Definiere E_{phys} und Q_{phys} *relativ* zum gefüllten Dirac-See.
- Anregung eines Fermions aus dem See in einen Zustand mit $E > 0$:

  $\hat{=}$ Erzeugung eines Teilchen-*Antiteilchen*-Paars!

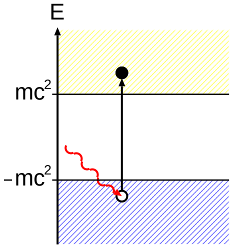
Löchertheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand



- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

  → Definiere E_{phys} und Q_{phys} *relativ* zum gefüllten Dirac-See.

- Anregung eines Fermions aus dem See in einen Zustand mit $E > 0$:

  $\hat{=}$ Erzeugung eines Teilchen-*Antiteilchen*-Paars!

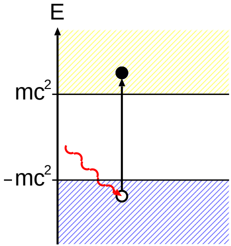
- Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-) Vielteilchentheorie.

Löchertheorie

- physikalisches Vakuum („Dirac-See"):
  - alle Zustände mit $E > 0$ unbesetzt
  - alle Zustände mit $E < 0$ besetzt

  → Übergang von zusätzlichen Teilchen in $E < 0$-Zustände Pauli-verboten!

  → stabiler Grundzustand



- Energie und Ladung des Vakuums = $-\infty$ (für e^-)

  → Definiere E_{phys} und Q_{phys} *relativ* zum gefüllten Dirac-See.

- Anregung eines Fermions aus dem See in einen Zustand mit $E > 0$:

  $\hat{=}$ Erzeugung eines Teilchen-*Antiteilchen*-Paars!

- Die Löchertheorie ist automatisch eine (∞-) Vielteilchentheorie.
- Sie funktioniert nicht für Bosonen (kein Pauli-Prinzip).

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen → Quantentheorie
  - hohe Energien → spezielle Relativitätstheorie

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen → Quantentheorie
  - hohe Energien → spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen → Quantentheorie
  - hohe Energien → spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien
- Beschreibung von Vielteilchenprozessen notwendig:

  Unschärferelation: Δx klein $\Rightarrow$ Δp groß $\Rightarrow$ ΔE groß

  → Energie reicht aus, virtuell neue Teilchen zu erzeugen.

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen → Quantentheorie
  - hohe Energien → spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien
- Beschreibung von Vielteilchenprozessen notwendig:

  Unschärferelation: Δx klein $\Rightarrow$ Δp groß $\Rightarrow$ ΔE groß

  → Energie reicht aus, virtuell neue Teilchen zu erzeugen.
- Die ursprüngliche QM lässt solche Prozesse nicht zu.

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen $\rightarrow$ Quantentheorie
  - hohe Energien $\rightarrow$ spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien
- Beschreibung von Vielteilchenprozessen notwendig:

  Unschärferelation: Δx klein $\Rightarrow$ Δp groß $\Rightarrow$ ΔE groß

  $\rightarrow$ Energie reicht aus, virtuell neue Teilchen zu erzeugen.
- Die ursprüngliche QM lässt solche Prozesse nicht zu.
- klassische E-Dynamik: Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen $\rightarrow$ Quantentheorie
  - hohe Energien $\rightarrow$ spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien
- Beschreibung von Vielteilchenprozessen notwendig:

  Unschärferelation: Δx klein $\Rightarrow$ Δp groß $\Rightarrow$ ΔE groß

  $\rightarrow$ Energie reicht aus, virtuell neue Teilchen zu erzeugen.
- Die ursprüngliche QM lässt solche Prozesse nicht zu.
- klassische E-Dynamik: Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

  ($\rightarrow$ nach Quantisierung: Erzeugung von Photonen)

Fazit: Warum Quantenfeldtheorie?

- Elementarteilchenphysik:
  - kleine Distanzen → Quantentheorie
  - hohe Energien → spezielle Relativitätstheorie
- Relativistische QM besitzt Inkonsistenzen, z.B. negative Energien
- Beschreibung von Vielteilchenprozessen notwendig:
  Unschärferelation: Δx klein $\Rightarrow$ Δp groß $\Rightarrow$ ΔE groß
  → Energie reicht aus, virtuell neue Teilchen zu erzeugen.
- Die ursprüngliche QM lässt solche Prozesse nicht zu.
- klassische E-Dynamik: Abstrahlung elektromagnetischer Wellen
  (→ nach Quantisierung: Erzeugung von Photonen)
- Die nichtrel. Vielteilchenphysik bedient sich QFT-ähnlicher Methoden
  („2. Quantisierung": Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

Warum Quantenfeldtheorie? – Kausalität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erzeuge Teilchen am Ort $\vec{x}_0$ und messe nach Zeit t am Ort $\vec{x}$.

  qm-Wahrscheinlichkeitsamplitude: $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$

Warum Quantenfeldtheorie? – Kausalität

- Erzeuge Teilchen am Ort $\vec{x}_0$ und messe nach Zeit t am Ort $\vec{x}$.

  qm-Wahrscheinlichkeitsamplitude: $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$
- freies nichtrelativistisches Teilchen:

$$
\begin{aligned}
U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{x}_0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} \, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im\frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2t}} \qquad \neq 0 \; \forall t, \vec{x}
\end{aligned}
$$

Warum Quantenfeldtheorie? – Kausalität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Erzeuge Teilchen am Ort $\vec{x}_0$ und messe nach Zeit t am Ort $\vec{x}$.

  qm-Wahrscheinlichkeitsamplitude: $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$

- freies nichtrelativistisches Teilchen:

$$
\begin{aligned}
U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{x}_0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im\frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2t}} \qquad \neq 0 \ \forall t, \vec{x}
\end{aligned}
$$

- relativistische Rechnung: qualitativ ähnliches Resultat

  $\longrightarrow$ Kausalitätsverletzung! $(\,|\vec{x} - \vec{x}_0| > t \Leftrightarrow v > c\,)$

Warum Quantenfeldtheorie? – Kausalität

- Erzeuge Teilchen am Ort $\vec{x}_0$ und messe nach Zeit t am Ort $\vec{x}$.

  qm-Wahrscheinlichkeitsamplitude: $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$

- freies nichtrelativistisches Teilchen:

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} \, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im\frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2t}} \quad \neq 0 \ \forall t, \vec{x}$$

- relativistische Rechnung: qualitativ ähnliches Resultat

  ➞ Kausalitätsverletzung! $\left(|\vec{x} - \vec{x}_0| > t \Leftrightarrow v > c \right)$

- QFT löst dieses Problem, indem sich Teilchen- und Antiteilchenamplituden für raumartige Abstände gegenseitig auslöschen.