

nicht-triviale Prozesse (keine Vorwärtsstreuung):

$$\Rightarrow \text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} \left(\text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}'_A \vec{k}'_B \rangle_{\text{in}} \right)^*$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f) (2\pi)^4 \delta^4(k'_A + k'_B - \sum_f p_f) \mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\}) \mathcal{M}^*(\{k'_i\} \rightarrow \{p_f\})$$

$\underbrace{\sum_f p_f}_{= k'_A + k'_B}$

außerdem:

$$\int d^2b e^{i \vec{b} \cdot (\vec{k}'_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^2(\vec{k}'_{B\perp} - \vec{k}_{B\perp}) = (2\pi)^2 \delta(k'_{Bx} - k_{Bx}) \delta(k'_{By} - k_{By})$$

Ausführung der k'_i -Integrationen mit Hilfe der δ -Fktn.:

(→ Übung)

$$\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 |\phi_B(\vec{k}_B)|^2}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} * |\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f)$$

mit

$$v_i := \frac{k_{iz}}{E_i}$$

Wellenpakete im Impulsraum scharf lokalisiert:

$$|\phi_i(\vec{k}_i)|^2 \approx (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \underbrace{\left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_f p_f)}_{\text{Lorentz-invariantes Phasenelement}} * \underbrace{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}_{\text{"Physik"}}$$

transformiert sich wie eine Fläche
(↔ Wirkungsquerschnitt)

Lorentz-invariantes Phasenelement

"Physik"

$|v_A - v_B|$ = Relativgeschwindigkeit der einlaufenden Teilchen.
(kollinear: $v_A \parallel v_B$)

Spezialfall: $A + B \rightarrow 1 + 2$ im Schwerpunktsystem

$$P_A = \begin{pmatrix} E_A \\ \vec{p}_A \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} E_B \\ -\vec{p}_A \end{pmatrix} \Rightarrow P_A + P_B = \begin{pmatrix} E_{CM} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

mit $E_A = \sqrt{\vec{p}_A^2 + m_A^2}$, $E_B = \sqrt{\vec{p}_A^2 + m_B^2}$, $E_{CM} = E_A + E_B$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(P_A + P_B - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1 E_2} 2\pi \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)$$

mit $E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2}$

$E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_2^2}$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\Omega \frac{1}{E_1 E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1|^2}{E_1 E_2} \frac{1}{\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2}}$$

→ legt $|\vec{p}_1|$ fest

$$= \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{CM}} \int d\Omega$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CMS} = \frac{1}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{CM}} |M(P_A, P_B \rightarrow p_1, p_2)|^2$$

weiterer Spezialfall: gleiche Massen für alle Teilchen

$$\Rightarrow E_A = E_B, \quad E_1 = E_2 \quad \Rightarrow E_A = E_B = E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E_{CM}$$

$$\Rightarrow |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right| = \frac{2|\vec{p}_1|}{E_1} = 4 \frac{|\vec{p}_1|}{E_{CM}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CMS}} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4$

V.6 Berechnung von S-Matrixelementen

$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{\text{in}}$: Heisenberg-Zustand, der zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ zwei separate Teilchen mit Impulsen \vec{k}_A und \vec{k}_B beschreibt.

z.B. Gesamtimpuls: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{P}(-\tau) |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{\text{in}} = (\vec{k}_A + \vec{k}_B) |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{\text{in}}$

analoge Zustände zur Referenzzeit t_0 :

$$\hat{P}(t_0) |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A + \vec{k}_B) |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\hat{P}(t_0) = e^{iH(t_0-t)} \hat{P}(t) e^{-iH(t_0-t)}$$

$$\Rightarrow \hat{P}(t) e^{-iH(t_0-t)} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A + \vec{k}_B) e^{-iH(t_0-t)} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\stackrel{t \rightarrow -\infty}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{P}(-\tau) e^{-iH(t_0+\tau)} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A + \vec{k}_B) \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-iH(t_0+\tau)} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{\text{in}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-iH(t_0+\tau)} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle e^{i\varphi_{\text{in}}}$$

(φ_{in} : zunächst beliebige Phase)

analog:

$$|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle_{\text{out}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-iH(t_0-\tau)} |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle e^{i\varphi_{\text{out}}}$$

$$\Rightarrow \langle \bar{p}_1 \dots \bar{p}_n | \bar{k}_A \bar{k}_B \rangle_{in} = \langle \bar{p}_1 \dots \bar{p}_n | S | \bar{k}_A \bar{k}_B \rangle$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \bar{p}_1 \dots \bar{p}_n | e^{-2iH\tau} | \bar{k}_A \bar{k}_B \rangle e^{i(\varphi_{in} - \varphi_{out})}$$

Phasenfaktor:

- steht nicht in Peskin / Schroeder
- irrelevant für $d\sigma \sim |M|^2$
- $S \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$ für $H_{WW} = 0$
 - 2) z.B. $\varphi_{in} = (E_A + E_B)(t_0 + \tau)$, $\varphi_{out} = (E_A + \dots + E_n)(t_0 - \tau)$

Auswertung des Matrixelements:


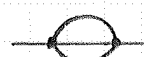
Problem: Wir wissen nicht, wie die wechselwirkenden Zustände aussehen.

Vakuum: $|e\rangle = \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} (e^{-iE_0\tau} |\Omega\rangle)^{-1} e^{-iH\tau} |0\rangle$

Annahme:

Ähnlich gilt $|\bar{k}_A \bar{k}_B\rangle \sim \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} e^{-iH\tau} |\bar{k}_A \bar{k}_B\rangle_0$

$$= \sqrt{2E_A 2E_B} a_A^\dagger a_B^\dagger |0\rangle$$

- im Wesentlichen richtig, aber Beweis nicht-trivial
- grundsätzliche Schwierigkeit:
Selbst asymptotisch unterliegen die Teilchen noch Selbstwechselwirkungen, z.B. , .

$$\leadsto \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

$$\sim \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | e^{-2iH\tau} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 e^{i(E_A+E_B)(t_0+\tau)} e^{-i(E_1+\dots+E_m)(t_0-\tau)}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | \underbrace{e^{-iH_0(t_0-\tau)} e^{-2iH\tau} e^{iH_0(t_0+\tau)}}_{U(\tau, -\tau)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \quad (\text{vgl. S. V-9})$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | T \left\{ \exp\left(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t)\right) \right\} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0$$

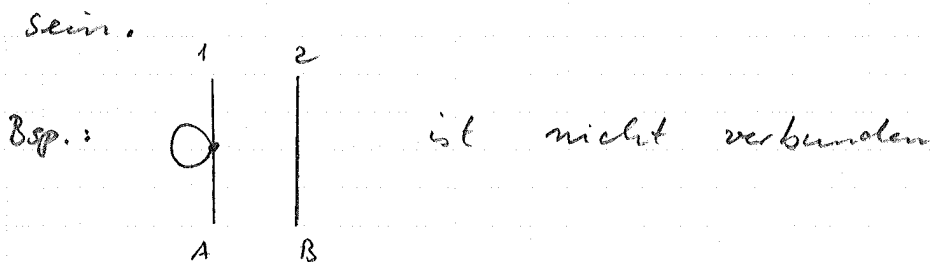
Man kann zeigen, dass sich durch Berücksichtigung des Proportionalitätsfaktors wieder viele Diagramme herauskürzen

$$\leadsto \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | iT | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \left(\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | T \left\{ \exp\left(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t)\right) \right\} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \right) \text{ verbunden, amputiert}$$

• „Verbunden“ heißt hier (im Unterschied zu S. V-20):

Alle externen Linien müssen mit einander verbunden sein.

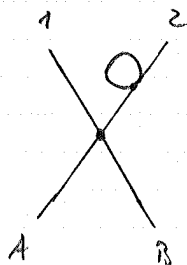


Vierimpulsverh. an den Vertices

$$\Rightarrow p_1 = p_A, p_2 = p_B \Rightarrow \text{kragt nur zur } \mathbb{1} \text{ von } S = \mathbb{1} + iT \text{ bei, nicht zu } T$$

• "Amputiert" :

Betrachte z. B.



Der Loop \mathcal{O}^2 beschreibt eine Selbstwechselwirkung des auslaufenden Teilchens 2.

→ hat nichts mit dem Streuprozess zu tun und wird durch den Proportionalitätsfaktor beim Übergang $|\bar{p}_1 \dots \bar{p}_n\rangle \rightarrow |\bar{p}_1 \dots \bar{p}_n\rangle_0$ weggelöst.

↳ allgemein:

gehe von jeder äußeren Linie aus nach innen und entferne die äußeren Diagrammtile, die durch den Schnitt einer einzigen Linie vom restlichen Diagramm getrennt werden können.

Bsp:

