

V.8 Feynman-Regeln der QED

Lagrange-Dichte der QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi} (i\partial - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

\downarrow
Elektron-Propagator

\downarrow
Photon-Prop.

\downarrow
Elektron-Photon-Ver

(1) Elektron-Propagator $\begin{array}{c} p \\ \longleftarrow \end{array} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

(2) Photon-Propagator $\mu \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ q \end{array} \nu = \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$

(3) externe Fermion-Linien:

- $u^s(\vec{p})$ für einlaufende e^- mit Impuls \vec{p} und Spin s
- $\bar{u}^s(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " " "
- $v^s(\vec{p})$ " einlaufende e^+ " " " " " "
- $\bar{v}^s(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " "

(4) externe Photon-Linien:

- $\epsilon_\lambda(\vec{p})$ für einlaufende γ mit Impuls \vec{p} und Pol. λ
- $\epsilon_\lambda^*(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " "

(5) Elektron-Photon-Vertex: $\int \not{\gamma}_\mu = -ie \gamma^\mu$

(6) Viererimpulserhaltung an jedem Vertex

(7) Integration über alle unbestimmten Impulse

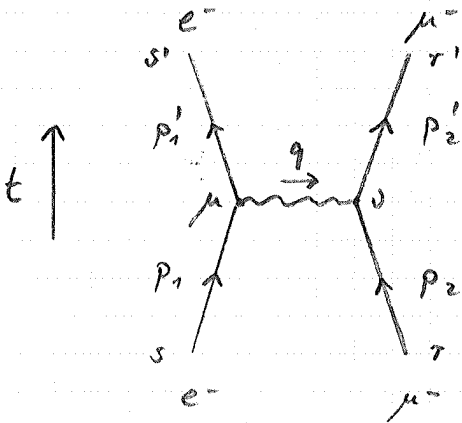
(8) Spur und Extra-Minuszeichen für geschlossene Fermion-Loops

(9) Rel. Minuszeichen beim Austausch zweier externer Fermionen

VI Elementare Prozesse der QED

VI.1 Elektron-Muon-Streuung und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

a) $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

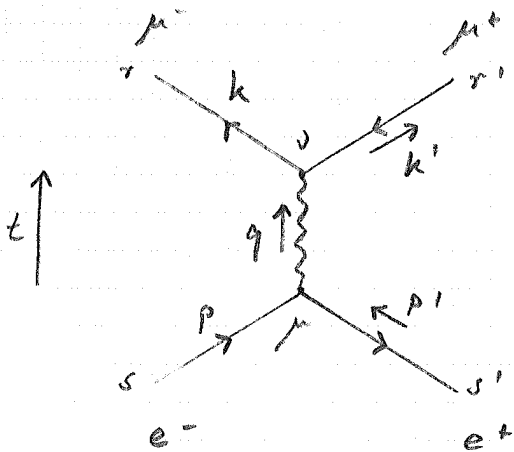


$$= \bar{u}^{s'}(\vec{p}_1') (-ie\gamma^\mu) u^s(\vec{p}_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) \\ \times \bar{u}^{r'}(\vec{p}_2') (-ie\gamma^\nu) u^r(\vec{p}_2)$$

mit $q = p_1 - p_1' = p_2' - p_2$

\Rightarrow $i\epsilon$ kann weggelassen werden, solange $q^2 \neq 0$ (kinematisch nur möglich, wenn $q=0$ \rightarrow uninteressant)

b) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



$$= \bar{v}^{s'}(\vec{p}') (-ie\gamma^\mu) u^s(\vec{p}) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \\ \times \bar{u}^r(\vec{k}) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(\vec{k}')$$

mit $q = p + p' = k + k'$
 $(\rightarrow q^2 \geq 4m_e^2 \neq 0)$

Sehr ähnliche Matrixelemente!

Werte im Folgenden b) aus (a) \rightarrow Übung)

$$i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu u^s(\vec{p})) (\bar{u}^r(\vec{k}) \gamma_\mu v^{r'}(\vec{k}'))$$

$$=: \frac{ie^2}{q^2} j^\mu J_\mu$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (j^\mu J_\mu) (j^\nu J_\nu)^* = \frac{e^4}{q^4} j^\mu j^{\nu*} J_\mu J_\nu^*$$

$$j^{\nu*} = (\bar{v} \gamma^\nu u)^* = (v^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu u)^\dagger$$

$$= u^\dagger \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} v$$

$$= \bar{u} \underbrace{\gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0}_{= \gamma^{\nu}} v = \bar{u} \gamma^\nu v$$

$$J_\nu^* = \bar{v} \gamma_\nu u$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu u^s(\vec{p})) \bar{u}^s(\vec{p}) \gamma^\mu v^{s'}(\vec{p}')$$

$$\cdot (\bar{u}^r(\vec{k}) \gamma_\mu v^{r'}(\vec{k}')) \bar{v}^{r'}(\vec{k}') \gamma_\nu u^r(\vec{k})$$

• unpolarisierte einlaufende Teilchen
 => Mittelung über s und s'

• keine Spin-Messung im Ausgangskanal
 => Summation über r und r'

$$2) |\mathcal{M}|_{\text{unpol}}^2 = \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}|^2$$

Erinnerung: $\sum_s u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m$

$$\sum_s v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m$$

$$\leadsto \sum_{s,s'} \bar{v}_a^{s'}(\vec{p}') \gamma_{ab}^{\mu} u_b^s(\vec{p}) \bar{u}_c^s(\vec{p}) \gamma_{cd}^{\nu} v_d^{s'}(\vec{p}')$$

$$= (\not{p}' - m)_{da} \gamma_{ab}^{\mu} (\not{p} + m)_{bc} \gamma_{cd}^{\nu} = \text{tr} [(\not{p}' - m) \gamma^{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\nu}]$$

$$\Rightarrow |M|_{\text{unpol}}^2 = \frac{e^4}{4g^4} \text{tr} [(\not{p}' - m_e) \gamma^{\mu} (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu}] \\ \times \text{tr} [(\not{k} + m_{\mu}) \gamma_{\mu} (\not{k}' - m_{\mu}) \gamma_{\nu}]$$

Der Ausdruck enthält keine Spinoren mehr!

Regeln zur Auswertung der Spuren über γ -Matrizen:

- $\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0$ für n ungerade
- $\text{tr} \mathbb{1}_{4 \times 4} = 4$
- $\text{tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}] = 4 g^{\mu\nu}$
- $\text{tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma}] = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$
- $\text{tr} [\gamma_5] = 0$
- $\text{tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_5] = 0$
- $\text{tr} [\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \gamma_5] = -4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (mit $\epsilon^{0123} = +1$)
- $\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = \text{tr} [\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_1}]$

z.B. $\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]$

$$= \underbrace{\text{tr} [\gamma_5 \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]}_{=1} = (-1)^n \text{tr} [\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma_5], \text{ da } \gamma_5 \gamma^{\mu} = -\gamma^{\mu} \gamma_5 \\ = (-1)^n \text{tr} [\gamma_5 \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] \quad (\text{zykl. Vert. unter der Spur}) \\ = (-1)^n \text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] \\ \Rightarrow = 0, \text{ falls } n \text{ ungerade}$$

$$\Rightarrow \text{tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu]$$

$$= \text{tr}[\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu] - m_e^2 \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]$$

$$= p'_\alpha p_\beta \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu]$$

$$= 4 (p'_\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p' \cdot p + m_e^2))$$

$$\text{tr}[(\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu]$$

$$= 4 (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2))$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|_{\text{unpol}}^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[p \cdot k p' \cdot k' + p \cdot k' p' \cdot k + m_\mu^2 p \cdot p' + m_e^2 k \cdot k' + 2m_e^2 m_\mu^2 \right]$$

$$m_\mu = 105,7 \text{ MeV}, \quad m_e = 511 \text{ keV}$$

↑ kann bei Energien, die zur Erzeugung von Myonen erforderlich sind, vernachlässigt werden.

außerdem:

$$p + p' = k + k' = q$$

$$\Rightarrow q^2 = (p + p')^2 = 2m_e^2 + 2p \cdot p' \approx 2p \cdot p' \Rightarrow p \cdot p' \approx \frac{q^2}{2}$$

$$\bullet (p' - k')^2 = (k - p)^2$$

$$= m_e^2 + m_\mu^2 - 2k' \cdot p' = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p \cdot k$$

$$\Rightarrow p' \cdot k' = p \cdot k$$

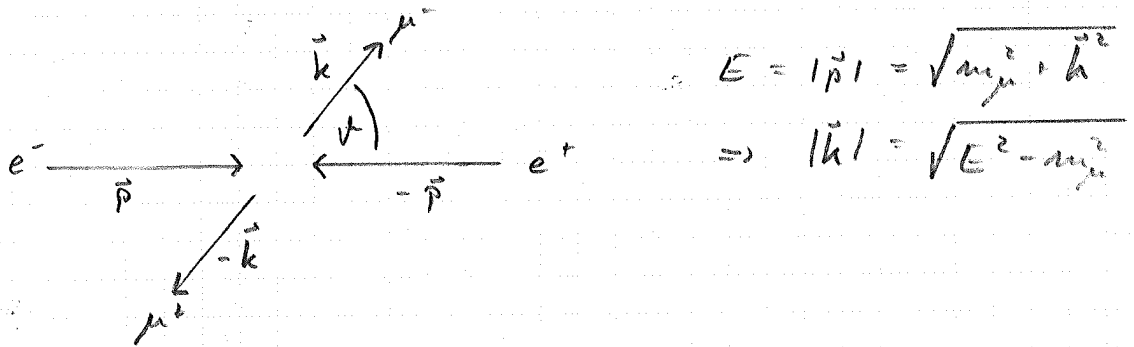
$$\bullet (p - k')^2 = (k - p')^2$$

$$\Rightarrow p \cdot k' = p' \cdot k$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|_{\text{unpol}}^2 \approx \frac{8e^4}{q^4} \left[(p \cdot k)^2 + (p' \cdot k)^2 + \frac{1}{2} m_\mu^2 q^2 \right]$$

weitere Auswertung im CMS:

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} E \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow q^2 = (p + p')^2 = 4E^2$$

$$p \cdot k = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{k} = E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta$$

$$p' \cdot k = E^2 + \vec{p} \cdot \vec{k} = E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |M|^2_{\text{unpol}} &= \frac{8e^4}{16E^4} \left[E^2 (E - |\vec{k}| \cos \theta)^2 + E^2 (E + |\vec{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right] \\ &= \frac{e^4}{2E^4} \left[2E^4 + 2E^2 |\vec{k}|^2 \cos^2 \theta + 2m_\mu^2 E^2 \right] \\ &= \frac{e^4}{2E^4} \left[2E^4 + 2(E^4 - E^2 m_\mu^2) \cos^2 \theta + 2E^2 m_\mu^2 \right] \\ &= e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned}$$

2. Wirkungsquerschnitt: $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \left| \frac{\vec{p}}{E} + \frac{\vec{p}}{E} \right| = 2$, $E_A = E_B = \frac{E_{\text{CM}}}{2} = E$

$$\stackrel{(V-25)}{\Rightarrow} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8E^2} \frac{|\vec{k}|}{32\pi^2 E} |M|^2_{\text{unpol}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{16E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]$$

mit $\alpha := \frac{e^2}{4\pi}$ "Feinstrukturkonstante"

2) totaler WQ :

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{2\pi\alpha^2}{16E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cdot \frac{2}{3} \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right]$$

Hochenergie - Limes: $E \gg m_\mu$

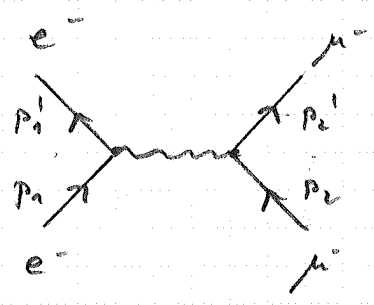
$$\Rightarrow \sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \right)$$

- E_{CM} = einzige dimensionsbehaftete Größe im Hochenergie - Limes $\Rightarrow \sigma \sim \frac{1}{E_{CM}^2}$ ✓
- Störungstheorie niedrigster Ordnung $\Rightarrow \sigma \sim |e^2|^2 \sim \alpha^2$ ✓

Allgemeines Rezept zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten:

1. Zeichne Feynman - Diagramme zur gewünschten Ordnung.
2. Übersetze die Diagramme mit Feynman - Regeln in \mathcal{M} .
3. Berechne $|\mathcal{M}|^2$ und summiere bzw. mittlere über Spins.
4. Berechne Spuren.
5. Wähle ein Koordinatensystem und spezifiziere die Kinematik.
6. Setze $|\mathcal{M}|^2_{(avg)}$ in die Formel für Wirkungsquerschnitte ein und integriere über den Phasenraum.

noch einmal zurück zu $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$:

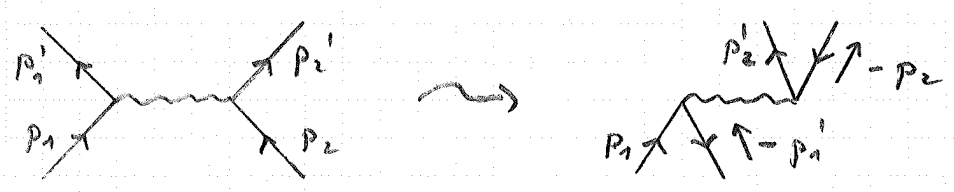


explizite Rechnung (\rightarrow Übung) :

$$| \mathcal{M}_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-} (p_1, p_2, p_1', p_2') |^2_{\text{unpol}}$$

$$= | \mathcal{M}_{e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+} (p = p_1, p' = -p_1', k = p_2', k' = -p_2) |^2_{\text{unpol}}$$

anschaulich: „Umkappen“ externer Linien



allgemeines Theorem:

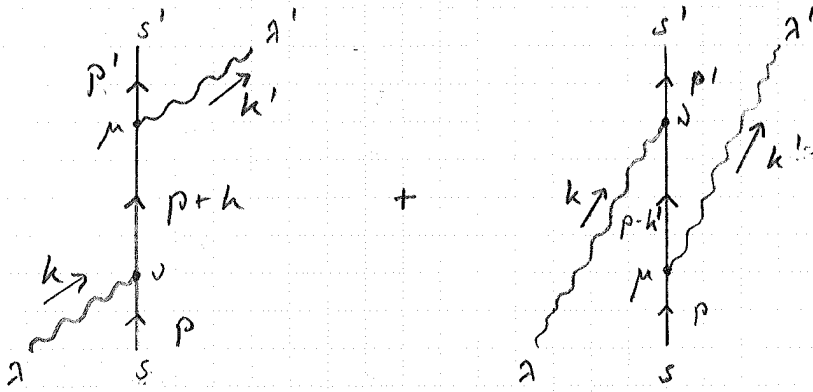
$$\mathcal{M} (\phi(p) + \{X\} \rightarrow \{Y\}) = \mathcal{M} (\{X\} \rightarrow \{Y\} + \bar{\phi}(-p))$$

(bis auf irr. Phasenfaktoren)

$\bar{\phi}$ = Antiteilchen von ϕ

„Crossing - Symmetrie“

VI. 2 Compton - Streuung ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$)



$$\Rightarrow i\mathcal{M} = \epsilon_{\lambda'\mu}^*(\vec{k}') \bar{u}^{s'}(\vec{p}') \left[(-ie\gamma^\mu) iS_F(p+k) (-ie\gamma^\nu) + (-ie\gamma^\nu) iS_F(p-k') (-ie\gamma^\mu) \right] u^s(\vec{p}) \epsilon_{\lambda\nu}(\vec{k})$$