Noether-Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Noether-Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale Transformation: $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha\, \Delta\phi(x)$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\, \Delta\mathscr{L} = \mathscr{L} + \alpha\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Delta\phi \right)$$

Noether-Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale Transformation: $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha\,\Delta\phi(x)$

  $$\Rightarrow \quad \mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\,\Delta\mathscr{L} = \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\Delta\phi \right)$$

- Symmetrietransformation: lässt die Bewegungsgleichung invariant

  Das ist der Fall, wenn $\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu J^\mu$ (J^μ: beliebiges Vektorfeld)

Noether-Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale Transformation: $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha\,\Delta\phi(x)$

  $$\Rightarrow \quad \mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L} + \alpha\,\Delta\mathscr{L} = \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi\right)$$

- Symmetrietransformation: lässt die Bewegungsgleichung invariant

  Das ist der Fall, wenn $\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu J^\mu$ (J^μ: beliebiges Vektorfeld)

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi(x) - J^\mu(x)$$

Jede kontinuierliche Symmetrie ist mit einem erhaltenen Strom verbunden.

Noether-Theorem

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- infinitesimale Transformation: $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha\,\Delta\phi(x)$

  $$\Rightarrow \quad \mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\,\Delta\mathscr{L} = \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi\right)$$

- Symmetrietransformation: lässt die Bewegungsgleichung invariant

  Das ist der Fall, wenn $\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu J^\mu$ (J^μ: beliebiges Vektorfeld)

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi(x) - J^\mu(x)$$

Jede kontinuierliche Symmetrie ist mit einem erhaltenen Strom verbunden.

- erhaltene Ladung: $\frac{d}{dt}Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad Q(t) = \int d^3x\, j^0(t,\vec{x})$

Noether-Theorem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- infinitesimale Transformation: $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha\,\Delta\phi(x)$

  $$\Rightarrow \quad \mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L} + \alpha\,\Delta\mathscr{L} = \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi\right)$$

- Symmetrietransformation: lässt die Bewegungsgleichung invariant

  Das ist der Fall, wenn $\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L} + \alpha\,\partial_\mu J^\mu$ (J^μ: beliebiges Vektorfeld)

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi(x) - J^\mu(x)$$

Jede kontinuierliche Symmetrie ist mit einem erhaltenen Strom verbunden.

- erhaltene Ladung: $\frac{d}{dt}Q(t) = 0$ mit $Q(t) = \int d^3x\, j^0(t,\vec{x})$

- Invarianz unter Raum-Zeit-Translationen: $\phi(x) \rightarrow \phi(x+a)$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial^\nu\phi - \mathscr{L} g^{\mu\nu}$$ (Energie-Impuls-Tensor)

erhaltene Ladungen: $\int d^3x\, T^{00} = \int d^3x\,(\pi\dot{\phi} - \mathscr{L}) = H$ Energie

$\int d^3x\, T^{0i} = -\int d^3x\,\pi\partial_i\phi = P^i$ Impuls des Feldes

Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierung der klassischen Mechanik:

  Koordinaten und (kanonisch konjugierte) Impulse $\rightarrow$ Operatoren mit

  $$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn}\,, \qquad [q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierung der klassischen Mechanik:

  Koordinaten und (kanonisch konjugierte) Impulse $\rightarrow$ Operatoren mit

  $$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn}\,, \qquad [q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

- Analoges Vorgehen für Felder:

  $$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')\,, \qquad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierung der klassischen Mechanik:

  Koordinaten und (kanonisch konjugierte) Impulse $\rightarrow$ Operatoren mit

  $$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn}\,, \qquad [q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

- Analoges Vorgehen für Felder:

  $$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')\,, \qquad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

- ϕ, π Operatoren $\Rightarrow$ $\mathscr{H}$, H ebenfalls Operatoren. Energie-Spektrum?

Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierung der klassischen Mechanik:

  Koordinaten und (kanonisch konjugierte) Impulse $\to$ Operatoren mit

  $$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn}\,, \qquad [q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

- Analoges Vorgehen für Felder:

  $$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')\,, \qquad [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = 0$$

  (im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu jeweils gleichen Zeiten)

- ϕ, π Operatoren $\Rightarrow$ $\mathscr{H}$, H ebenfalls Operatoren. Energie-Spektrum?

- Fourier-Transformation des klassischen Feldes: $\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\phi(\vec{p}, t)$

  Klein-Gordon: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 - m^2\right)\phi(\vec{x}, t) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}\,^2 + m^2)\right]\phi(\vec{p}, t) = 0$

  $\hat{=}$ hamon. Oszillator $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$ mit $\omega = \sqrt{\vec{p}\,^2 + m^2} \equiv \omega_{\vec{p}}$