Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Symmetrie-Transformationen: $|\phi\rangle \to |\phi'\rangle = U|\phi\rangle$
  - Erwartungswerte: $\langle\phi|A|\phi\rangle \to \langle\phi'|A|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger AU|\phi\rangle \equiv \langle\phi|A'|\phi\rangle$

    $\longrightarrow$ Operatoren: $A \to A' = U^\dagger AU$

Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Symmetrie-Transformationen: $|\phi\rangle \to |\phi'\rangle = U|\phi\rangle$
  - Erwartungswerte: $\langle\phi|A|\phi\rangle \to \langle\phi'|A|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger AU|\phi\rangle \equiv \langle\phi|A'|\phi\rangle$

    ➞ Operatoren: $A \to A' = U^\dagger AU$
- Lorentz-Transformationen: $x \to \Lambda x$

  $$\Rightarrow \; \psi(x) \to U^\dagger(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$$

Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Symmetrie-Transformationen: $|\phi\rangle \to |\phi'\rangle = U|\phi\rangle$
  - Erwartungswerte: $\langle\phi|A|\phi\rangle \to \langle\phi'|A|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger AU|\phi\rangle \equiv \langle\phi|A'|\phi\rangle$

    ➞ Operatoren: $A \to A' = U^\dagger AU$
- Lorentz-Transformationen: $x \to \Lambda x$

  $$\Rightarrow \psi(x) \to U^\dagger(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$$
- Parität: $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$, $U \equiv P$
  - $P^\dagger\psi(t,\vec{x})P = e^{i\alpha}\gamma^0\psi(t,\vec{x})$
  - $P^\dagger a^s_{\vec{p}}P = e^{i\alpha}a^s_{-\vec{p}}$
  - $P^\dagger b^s_{\vec{p}}P = -e^{-i\alpha}b^s_{-\vec{p}}$

Diskrete Symmetrien

- Symmetrie-Transformationen: $|\phi\rangle \to |\phi'\rangle = U|\phi\rangle$
  - Erwartungswerte: $\langle\phi|A|\phi\rangle \to \langle\phi'|A|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger AU|\phi\rangle \equiv \langle\phi|A'|\phi\rangle$

    → Operatoren: $A \to A' = U^\dagger AU$

- Lorentz-Transformationen: $x \to \Lambda x$

  $$\Rightarrow \psi(x) \to U^\dagger(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$$

- Parität: $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}, \quad U \equiv P$
  - $P^\dagger\psi(t,\vec{x})P = \gamma^0\psi(t,\vec{x})$ für $e^{i\alpha} = 1$
  - $P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = a^s_{-\vec{p}}$
  - $P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = -b^s_{-\vec{p}}$

Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Parität: $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow x' = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$, $U \equiv P$
  - $P^\dagger \psi(t, \vec{x}) P = \gamma^0 \psi(t, \vec{x})$
  - $P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = a^s_{-\vec{p}}$, $P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = -b^s_{-\vec{p}}$

Diskrete Symmetrien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Parität: $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$, $U \equiv P$
  - $P^\dagger \psi(t, \vec{x}) P = \gamma^0 \psi(t, \vec{x})$
  - $P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = a^s_{-\vec{p}}\,, \qquad P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = -b^s_{-\vec{p}}$
- Zeitumkehr: $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} -t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$, $U \equiv T$
  - $T^\dagger \psi(t, \vec{x}) T = -\gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \vec{x})$
  - $P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = a^{-s}_{-\vec{p}}\,, \qquad P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = -b^{-s}_{-\vec{p}}$
- Ladungskonjugation: Teilchen $\leftrightarrow$ Antiteilchen , $U \equiv C$
  - $C^\dagger \psi(x) C = -i\gamma^2 \gamma^0 \overline{\psi}^T(x)$
  - $C^\dagger a^s_{\vec{p}} C = b^s_{\vec{p}}\,, \qquad C^\dagger b^s_{\vec{p}} C = a^s_{\vec{p}}$

Bilineare

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

Bilineare

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$
- $\mathbb{1}$, γ_5, $\{\gamma^\mu\}$, $\{\gamma^\mu\gamma_5\}$, $\{\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$ bilden eine Basis der 4×4-Matrizen

Bilineare

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$
- $\mathbb{1}$, γ_5, $\{\gamma^\mu\}$, $\{\gamma^\mu\gamma_5\}$, $\{\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$ bilden eine Basis der 4×4-Matrizen
- Transformationsverhalten:

	$\bar{\psi}\psi$	$\bar{\psi}i\gamma_5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
	Skalar	Pseudoskalar	Vektor	Axialvektor	Tensor
P	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
CPT	$+1$	$+1$	-1	-1	1

mit $(-1)^\mu = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad \mu = 0 \\ -1 & \text{"} \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$

Klassische kovariante Theorie des elektromagnetischen Feldes

- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ (Viererpotenzial)
- inhomogene Maxwell-Gln.: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, $(j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ (Ladungsstrom)

$\Rightarrow \quad \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x)$

- Eichtransformation: $A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ lässt $F^{\mu\nu}$ invariant
  - Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$

Klassische kovariante Theorie des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $\quad (A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ (Viererpotenzial)
- inhomogene Maxwell-Gln.: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, $\quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ (Ladungsstrom)

  $\Rightarrow \quad \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x)$
- Eichtransformation: $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ lässt $F^{\mu\nu}$ invariant
  - Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$
- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$

  $\Rightarrow \quad \pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu}(x) \quad \Rightarrow \quad \pi^0(x) = 0$ ➞ Quantisierung schwierig

Klassische kovariante Theorie des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $\quad (A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ (Viererpotenzial)
- inhomogene Maxwell-Gln.: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, $\quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ (Ladungsstrom)

  $\Rightarrow \quad \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x)$
- Eichtransformation: $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ lässt $F^{\mu\nu}$ invariant
  - Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$
- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$

  $\Rightarrow \quad \pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu}(x) \quad \Rightarrow \quad \pi^0(x) = 0$ ➞ Quantisierung schwierig
- Alternative: $\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu$ (Fermi)

  $\Rightarrow \quad \Box A^\mu = j^\mu(x)$ korrekt in Lorenz-Eichung
  - kanonisch-konjugierte Impulsdichten: $\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x)$ ✓