Quantentheorie und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

4. Übungsblatt 28. Mai 2014

Aufgabe P7: Bras und Kets

a) Wir betrachten einen normierten Ket $|\psi\rangle$ der ein Element des N-dimensionalen Hilbertraums $\mathcal{H}$ sei. Wir können $|\psi\rangle$ in eine Orthonormalbasis $\{|a_i\rangle\}$ entwickeln

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |a_i\rangle.$$

Wie kann man die Entwicklungskoeffizienten a_i bestimmen?

b) Wir betrachten ein weiteres Element $|\phi\rangle$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Nun können wir das *dyadische Produkt* $|\phi\rangle\langle\psi|$ bilden. Dieses wirkt wie ein linearer Operator.
Berechnen Sie:

$$\text{i)} \quad \big(|\phi\rangle\langle\psi|\big)\,|\psi\rangle, \qquad \text{ii)} \quad \big(|\phi\rangle\langle\psi|\big)\,|\phi\rangle, \qquad \text{iii)} \quad \big(|\phi\rangle\langle\psi|\big)\,|a_k\rangle.$$

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass auch $|\phi\rangle$ in die Orthonormalbasis $\{|a_i\rangle\}$ entwickelt werden kann.

c) Wir können die bekannten Wellenfunktionen $\psi(x)$ auch als die Darstellung eines Zustands im Ortsraum beschreiben $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Auch hier kann man die Entwicklung von $|\psi\rangle$ aus Teil a) verwenden. Verwenden Sie diese Entwicklung und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten a_i unter der Annahme, dass diese reell sind und die Skalarprodukte $\langle x|a_i\rangle$ für die Wellenfunktion $\psi(x) = A\cos(qx)$. Zerlegen Sie dazu den Kosinus in Exponentialfunktionen.

Aufgabe P8: Eigenschaften der Norm

In der Vorlesung wurden die Eigenschaften der Norm $||a|| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ besprochen. Seien $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zwei beliebige Zustände aus einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

a) Leiten Sie aus der Definition der Norm die Parallelogrammgleichung

$$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2||a||^2 + 2||b||^2$$

her.

b) Zeigen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle a|b\rangle| \leq ||a||\,||b||.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass aus der Positivität der Norm

$$||a - \lambda b|| \geq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

folgt und wählen Sie ein geeignetes λ

c) Beweisen Sie mit der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung

$$||a+b|| \leq ||a|| + ||b||.$$

Aufgabe H8: Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten einen Zustand $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |a_i\rangle$ der wie in Aufgabe P7 a) entwickelt werden kann. Wir betrachten eine Messapparatur die zwei mögliche Ausgangszustände, $|\alpha\rangle = b|a_k\rangle$ und $|\beta\rangle = 2b|a_l\rangle$ mit $b \in \mathbb{R}$, haben kann. Die Zustände $|a_i\rangle$ seien orthonormal, also $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, und der Zustand sei normiert $||\psi|| = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ergebnis $|\alpha\rangle$ aus der Messung zu erhalten ist

$$w(\alpha) = |\langle\alpha|\psi\rangle|^2. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden Endzustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$. Die Entwicklungskoeffizienten seien $a_k = a_l = 1/2$. Welche Eigenschaft von Wahrscheinlichkeiten können Sie benutzen um b zu bestimmen? Welchen Wert erhalten Sie für b?

b) Betrachten wir nun einen nicht normierten Zustand $|\psi'\rangle$, der parallel zu $|\psi\rangle$ ist, mit der Norm $||\psi'|| = c$. Welche Probleme treten auf, wenn man naiv Gleichung (1) mit dem Wert für b aus Teil a) verwendet? Welche Änderungen müssen Sie an Gleichung (1) vornehmen, damit Sie die richtigen Wahrscheinlichkeiten erhalten ohne b neu zu berechnen?

Aufgabe H9: Ehrenfest Theorem

In der Vorlesung haben wir Orts- und Impulsoperatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ kennengelernt. Wie im Skript definiert ist der Erwartungswert eines Operators $\hat{A}$ (hier in 1d)

$$\langle\hat{A}\rangle = \int dx \psi^*(x,t)\hat{A}\psi(x,t),$$

wobei $\psi(x,t)$ normierte Eigenfunktionen des Hamilton Operators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

in einer Dimesion sind. Für die Erwartungswerte von Operatoren gilt das *Ehrenfest Theorem*

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]_-\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[V(\hat{x}),\hat{p}]_-\rangle.$$

Dieses Theorem wollen wir beweisen.

a) Führen Sie zunächst die Zeitableitung auf den Erwartungswert des Impulsoperators aus, indem Sie die Definition einsetzen. Hinweis: Der Impulsoperator hängt nicht explizit von der Zeit ab.

b) Verwenden Sie die Definition der Schrödingergleichung und die Definition des Kommutators aus dem Skript um den Ausdruck zu vereinfachen.

c) Für Kommutatoren gilt, dass $[a\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}]_- = a[\hat{A},\hat{C}]_- + [\hat{B},\hat{C}]_-$. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{p}^2/(2m), \hat{p}]_-$ und setzen Sie ihr Ergebnis in die bisherige Rechnung ein.

d) Was erhält man für die rechte Seite des Ehrenfest Theorems für ein Potential der Form $V(\hat{x}) = \alpha\hat{x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$?